

## Chương 32: Độ tự cảm

**T**rong chương 31 ta biết rằng suất điện động và dòng điện được sinh ra trong vòng dây dẫn khi từ thông qua diện tích giới hạn bởi vòng dây đó biến thiên theo thời gian. Trong chương này, trước tiên trình bày về hiện tượng *tự cảm*, là hiện tượng dòng điện biến thiên theo thời gian trong mạch gây ra suất điện động cảm ứng chống lại suất điện động ban đầu đã thiết lập nên dòng điện biến thiên theo thời gian. Sự tự cảm là cơ sở của *cuộn cảm*. Sau đó là phần trình bày về năng lượng được tích trữ trong từ trường của cuộn cảm và mật độ năng lượng từ trường.

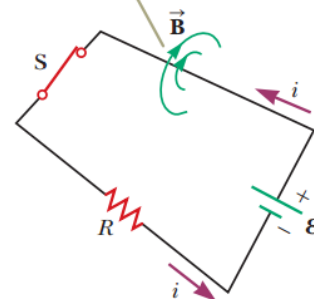
Tiếp theo là phần trình bày về hiện tượng *hỗ cảm*, là hiện tượng suất điện động được sinh ra trong một cuộn dây do sự thay đổi từ thông gây bởi một cuộn dây thứ hai. Cuối cùng là phần khảo sát đặc trưng của các mạch điện có chứa cuộn cảm, điện trở, tụ điện theo các cách tổ hợp khác nhau.

### Hiện tượng tự cảm và độ tự cảm

33.1 Ta cần phân biệt suất điện động và dòng điện gây bởi các nguồn như pin và ắc quy với suất điện động và dòng điện gây bởi sự biến thiên của từ trường. Suất điện động và dòng điện do từ trường biến thiên gây ra phải được thêm từ *cảm ứng*, ví dụ suất điện động cảm ứng, dòng điện cảm ứng.

Xét mạch điện gồm khóa S, điện trở R và nguồn điện  $\mathcal{E}$  như trên hình 32.1. Khi khóa S được chuyển sang vị trí đóng mạch, dòng điện trong mạch không nhảy lập tức từ 0 tới giá trị cực đại  $\mathcal{E}/R$  của nó. Định luật cảm ứng điện từ Faraday (phương trình 31.1) được dùng để mô tả hiện tượng này như sau. Khi xuất hiện dòng điện chạy trong mạch, các đường sức từ của dòng điện này sẽ chạy xuyên qua diện tích giới hạn bởi vòng dây tạo bởi mạch điện, gây ra một từ thông qua vòng dây. Vì khi đóng mạch, dòng điện đang tăng từ 0 đến giá trị cực đại nên từ thông qua vòng dây cũng đang tăng, sinh ra một suất điện động cảm ứng trong mạch. Hướng của suất điện động cảm ứng là sao cho nó gây ra dòng điện cảm ứng trong vòng dây, mà từ trường của dòng điện cảm ứng này chống lại sự thay đổi của từ trường ban đầu. Do đó chiều của suất điện động cảm ứng ngược với chiều của suất điện động của nguồn điện, làm cho dòng điện trong mạch tăng từ từ chứ không phải tăng tức thời đến giá trị cân bằng cuối cùng của nó. Do chiều của nó như vậy nên suất điện động cảm ứng được gọi là *suất điện động ngược*, tương tự như suất điện động cảm ứng trong một động cơ đã thảo luận trong chương 31. Hiện tượng này được gọi là hiện tượng **tự cảm** do sự thay đổi từ thông qua mạch và suất điện động cảm ứng được sinh ra bởi chính mạch đó. Suất điện động cảm ứng  $\mathcal{E}_L$  thiết lập trong trường hợp này được gọi là **suất điện động tự cảm**.

Sau khi khóa S được đóng, dòng điện sinh ra một từ thông qua diện tích giới hạn bởi khung dây. Khi dòng điện tăng dần đến giá trị cân bằng của nó, từ thông này thay đổi theo thời gian và sinh ra một suất điện động trong khung dây.



Hình 32.1: Hiện tượng tự cảm trong một mạch điện đơn giản.

Theo định luật Faraday, suất điện động tự cảm bằng và trái dấu với tốc độ biến thiên của từ thông. Từ thông tỉ lệ thuận với từ trường, từ trường lại tỉ lệ thuận với dòng điện trong mạch. Do đó, suất điện động cảm ứng luôn tỉ lệ với tốc độ biến thiên theo thời gian của dòng điện. Đối với một vòng dây bất kì, ta có thể viết sự tỉ lệ này là:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (32.1)$$

Trong đó  $L$  là một hệ số tỉ lệ, được gọi là **độ tự cảm** của vòng dây, nó phụ thuộc vào hình dạng của vòng dây và các đặc trưng vật lí khác. Nếu ta xét một cuộn dây gồm  $N$  vòng đặt sát nhau (một toroid hoặc solenoid) mang dòng điện  $i$ , từ định luật Faraday ta có  $\mathcal{E}_L = -L d\phi_B / dt$ . Kết hợp biểu thức này với phương trình 32.1 ta có:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} \quad (32.2)$$

Trong đó ta đã giả sử rằng từ thông qua các vòng dây là như nhau và  $L$  là độ tự cảm của cả cuộn dây.

Từ phương trình (32.1) ta có thể viết độ tự cảm như là:

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{di / dt} \quad (32.3)$$

Nhắc lại rằng điện trở là một số đo của sự chống lại dòng điện như đã cho bởi phương trình 27.6,  $R = \Delta V / I$ , so sánh ta thấy phương trình (32.3) có cùng dạng toán học như phương trình 27.6, chỉ ra rằng độ tự cảm là số đo của sự chống lại sự biến thiên của dòng điện.

Đơn vị trong hệ SI của độ tự cảm là Henry (H), từ phương trình (32.3) ta thấy  $1\text{H} = 1 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{A}$ .

Độ tự cảm của một cuộn dây phụ thuộc vào hình dạng của nó, tương tự như điện dung của tụ điện phụ thuộc vào hình dạng các bản tụ như trong phương trình 26.3 và điện trở phụ thuộc vào độ dài và tiết diện của vật dẫn như trong phương trình 27.9.

Tính toán độ tự cảm là khó thực hiện đối với các vật có hình dạng phức tạp. Trong các ví dụ dưới đây chỉ xét các trường hợp đơn giản và độ tự cảm được tính dễ dàng.

**Câu hỏi 32.1:** Một cuộn dây không có điện trở, các đầu của cuộn dây được kí hiệu là a và b. Điện thế ở đầu a cao hơn ở đầu b. Phát biểu nào sau đây phù hợp với trường hợp này? (a) Dòng điện không đổi chạy từ a đến b. (b) Dòng điện không đổi chạy từ b đến a. (c) Dòng điện đang tăng chạy từ a đến b. (d) Dòng điện đang giảm chạy từ a đến b. (e) Dòng điện đang tăng chạy từ b đến a. (f) Dòng điện đang giảm chạy từ b đến a.

### Bài tập mẫu 32.1: Độ tự cảm của solenoid

Xét một ống dây solenoid gồm  $N$  vòng và có chiều dài  $l$ . Giả sử  $l$  lớn hơn rất nhiều so với bán kính của ống dây và bên trong ống dây là không khí.

(A) Hãy tìm độ tự cảm của ống dây solenoid

(B) Hãy tính độ tự cảm của ống dây solenoid, nếu nó gồm 300 vòng, chiều dài của nó là 25 cm và tiết diện ngang của ống dây là  $4 \text{ cm}^2$ .

(C) Hãy tính suất điện động tự cảm trong ống dây solenoid nếu như dòng điện chạy trong ống dây đang suy giảm với tốc độ  $50,0 \text{ A/s}$ .

**Giải:**

(A) **Khái niệm hoá:** Các đường sức từ của mỗi vòng dây đi qua tất cả các vòng của cuộn dây, nên suất điện động cảm ứng trong mỗi vòng dây chống lại sự biến thiên của dòng điện.

**Phân loại:** Ta phân loại ví dụ này như là một bài tập thay thế. Do cuộn solenoid dài nên ta có thể sử dụng các kết quả đối với một solenoid lí tưởng ở chương 30.

Tìm từ thông qua diện tích  $A$  của mỗi vòng dây, dùng công thức tính từ trường 30.14:

$$\Phi_B = BA = \mu_0 niA = \mu_0 \frac{N}{l} iA$$

Thay biểu thức này vào phương trình 32.2:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \mu_0 \frac{N^2}{l} A \quad (32.4)$$

(B) Thay các giá trị số vào phương trình 32.4:

$$L = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}) \frac{300^2}{25,0 \times 10^{-2} \text{ m}} (4,00 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 1,81 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2 / \text{A} = 0,181 \text{ mH}$$

(C) Thay  $di/dt = -50,0 \text{ A/s}$  và từ kết quả của phần B:

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = -(1,81 \times 10^{-4} \text{ H})(-50,0 \text{ A/s}) = 9,05 \text{ mV}$$

Kết quả ở phần A cho thấy  $L$  phụ thuộc vào hình dạng và tỉ lệ với số vòng của cuộn dây. Vì  $N = nl$  ta có thể viết kết quả này dưới dạng:

$$L = \mu_0 \frac{(nl)^2}{l} A = \mu_0 n^2 Al = \mu_0 n^2 V \quad (32.5)$$

Trong đó  $V = Al$  là thể tích bên trong của solenoid.

## Các mạch RL

33.2 Nếu mạch điện chứa cuộn dây thì độ tự cảm của cuộn dây ngăn không cho dòng điện trong mạch tăng hoặc giảm một cách tức thời. Một phần tử mạch điện có độ tự cảm lớn được gọi là một **cuộn cảm** và có kí hiệu là  $\text{---}\text{---}\text{---}$ . Ta giả sử độ tự cảm của phần còn lại của mạch điện có thể bỏ qua so với độ tự cảm của cuộn cảm. Tuy nhiên, ngay cả khi mạch điện không có cuộn cảm, nó cũng có một độ tự cảm có thể làm ảnh hưởng hoạt động của mạch điện.

Vì độ tự cảm của cuộn cảm gây ra một suất điện động ngược nên cuộn cảm trong mạch chống lại các thay đổi của dòng điện trong mạch đó. Cuộn cảm cố gắng giữ cho dòng điện ổn định như nó vốn có trước khi xảy ra sự thay đổi. Nếu điện áp của nguồn điện trong mạch tăng lên để cho dòng điện tăng lên thì cuộn cảm chống lại sự thay đổi này và sự tăng dòng điện không xảy ra ngay lập tức. Nếu điện áp của nguồn giảm xuống thì cuộn cảm gây ra một sự suy giảm chậm của dòng điện chứ không phải là một sự suy giảm tức thì. Do đó, cuộn cảm làm cho mạch điện trở nên “chậm chạp” khi nó phản ứng lại các thay đổi điện áp.

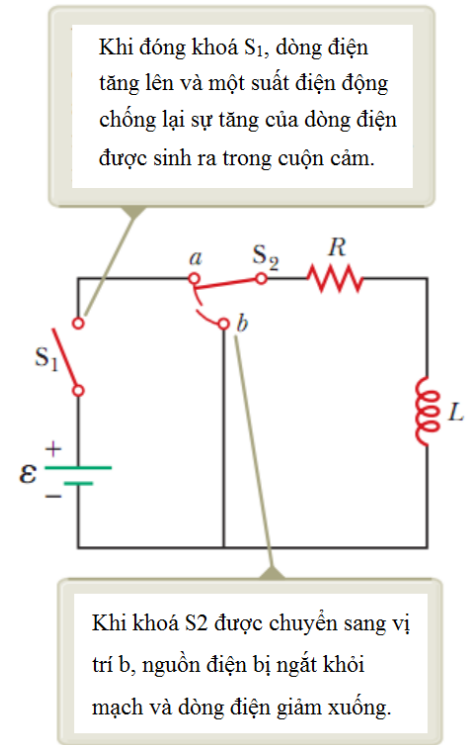
Xét mạch điện như hình 32.2, ta bỏ qua điện trở nội của nguồn điện. Đây là một **mạch RL**. Khóa  $S_2$  được đặt ở vị trí a hoặc b. (Nếu khóa  $S_2$  không được nối với a hoặc b thì dòng điện trong mạch sẽ dừng lại đột ngột). Giả sử  $S_2$  được đặt ở a và  $S_1$  được mở đối với  $t < 0$  và sau đó chuyển qua đóng lúc  $t = 0$ . Dòng điện trong mạch bắt đầu tăng, và một suất điện động ngược (phương trình 32.1) chống lại sự tăng dòng điện được sinh ra trong cuộn cảm.

Áp dụng quy tắc vòng Kirchhoff cho mạch này theo chiều kim đồng hồ ta có:

$$\mathcal{E} - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (32.6)$$

Trong đó  $iR$  là điện áp qua điện trở. (Các quy tắc Kirchhoff đã được phát triển cho các mạch có dòng điện ổn định, nhưng chúng cũng áp dụng được cho mạch điện có dòng điện đang thay đổi nếu ta cho rằng chúng biểu thị mạch điện tại một thời điểm). Ta tìm nghiệm của phương trình vi phân này, giống như trường hợp mạch RC (xem mục 28.4).

Nghiệm toán học của phương trình 32.6 biểu thị dòng điện trong mạch như một hàm số của thời gian. Để tìm nghiệm này, ta đặt  $x = (\mathcal{E}/R) - i$ , thì  $dx = -di$ . Phương trình 32.6 trở thành:



Hình 32.2: Mạch RL. Khi khóa  $S_2$  ở vị trí a, nguồn điện ở trong mạch.

$$x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$

Sắp xếp lại các số hạng và lấy tích phân biểu thức cuối cùng này ta có:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{dx} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L} t$$

Trong đó  $x_0$  là giá trị của  $x$  tại thời điểm  $t = 0$ . Lấy e mũ cả 2 vế ta được:

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

Vì  $i=0$  tại  $t=0$ , từ định nghĩa của  $x$  ta nhận thấy rằng  $x_0 = (\mathcal{E} / R)$ . Vậy ta có:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L} \quad \text{hay}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

Biểu thức này chỉ ra cách mà cuộn cảm ảnh hưởng lên dòng điện. Dòng điện không tăng lập tức tới giá trị cân bằng cuối cùng của nó khi khóa được đóng mà nó tăng theo hàm e mũ. Nếu độ tự cảm được loại bỏ khỏi mạch điện, tương ứng với việc cho  $L$  tiến tới 0, số hạng e mũ trở thành 0 và dòng điện trong trường hợp này không phụ thuộc vào thời gian; dòng điện tăng tức thì tới giá trị cực đại của nó khi không có độ tự cảm.

Ta có thể viết biểu thức này như là:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (32.7)$$

Trong đó hằng số  $\tau$  là **hằng số thời gian** của mạch RL:

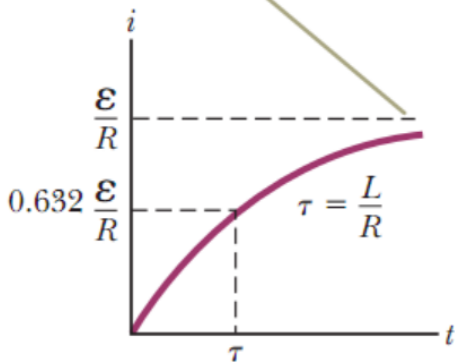
$$\tau = \frac{L}{R} \quad (32.8)$$

Về mặt vật lý,  $\tau$  là khoảng thời gian cần thiết để dòng điện trong mạch đạt tới  $(1 - e^{-1}) = 0,632 = 63,2\%$  của giá trị cực đại  $R/L$  của nó. Hằng số thời gian là một tham số hữu ích để so sánh thời gian phản hồi của các mạch khác nhau.

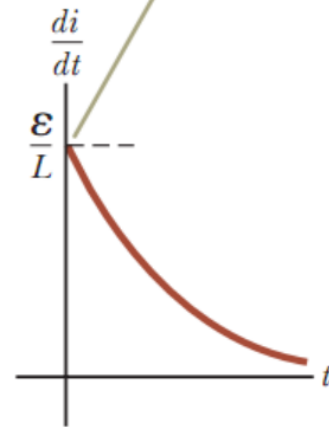
Hình 32.3 là đồ thị của dòng điện theo thời gian trong mạch RL. Giá trị cân bằng của mạch, xảy ra khi  $t$  tiến tới vô cùng, là  $\frac{\mathcal{E}}{R}$ . Điều này có thể thấy được bằng cách đặt  $di/dt = 0$  trong phương trình 32.6 rồi giải đối với dòng điện  $i$ . (Khi cân bằng thì sự biến thiên của

dòng điện bằng 0). Do đó dòng điện ban đầu tăng rất nhanh sau đó tiến dần tới giá trị cân bằng  $\frac{\mathcal{E}}{R}$  khi  $t$  tiến tới vô cùng.

Sau khi khoá  $S_1$  được đóng tại  $t = 0$ , dòng điện tăng dần đến giá trị cực đại  $\mathcal{E}/R$  của nó



Tốc độ biến thiên theo thời gian của dòng điện đạt cực đại tại  $t = 0$  là thời điểm khoá  $S_1$  được đóng.



Hình 32.3: Đồ thị dòng điện theo thời gian của mạch RL hình 32.2. Hằng số thời gian  $\tau$  là khoảng thời gian cần thiết để  $i$  đạt 63,2% giá trị cực đại của nó.

Hình 32.4: Đồ thị  $di/dt$  theo thời gian của mạch RL hình 32.2. Tốc độ này giảm theo hàm mũ theo thời gian khi  $i$  tiến tới giá trị cực đại của nó.

Ta sẽ khảo sát tốc độ biến thiên của dòng điện theo thời gian. Lấy đạo hàm bậc nhất phương trình 32.7 theo thời gian, ta có:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad (32.9)$$

Kết quả này cho thấy tốc độ biến thiên theo thời gian của dòng điện là cực đại (bằng  $\frac{\mathcal{E}}{R}$ ) tại  $t = 0$  và giảm theo hàm mũ về không khi  $t$  tiến tới vô cùng (hình 32.4).

Bây giờ ta xét lại mạch RL trên hình 32.2. Giả sử khóa  $S_2$  đã được đặt tại vị trí a đủ lâu (và khóa  $S_1$  vẫn còn đóng) để cho phép dòng điện đạt tới giá trị cân bằng  $\frac{\mathcal{E}}{R}$  của nó. Trong trường hợp này, mạch điện được mô tả bởi vòng ngoài trên hình 32.2. Nếu  $S_2$  được chuyển từ a sang b, mạch điện lúc này chỉ được mô tả bằng vòng bên phải trên hình 32.2. Do đó nguồn điện đã được loại bỏ khỏi mạch. Đặt  $\mathcal{E} = 0$  trong phương trình 32.6 ta có:

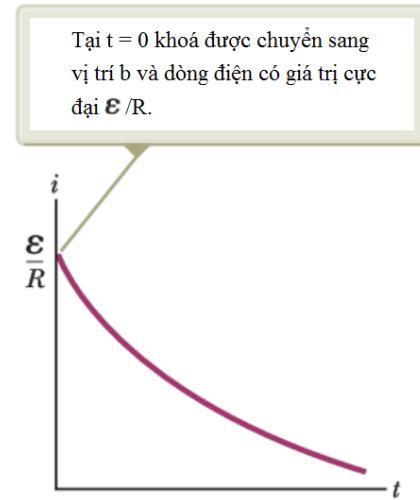
$$iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

Nghiệm của phương trình vi phân này là:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = I_i e^{-t/\tau} \quad (32.10)$$

Trong đó  $\mathcal{E}$  là suất điện động của nguồn và  $I_i = \frac{\mathcal{E}}{R}$  là dòng điện ban đầu tại thời điểm khóa  $S_2$  được đặt tại b.

Nếu mạch điện không chứa cuộn cảm, dòng điện sẽ giảm lập tức về 0 khi nguồn điện được ngắt ra. Khi có cuộn cảm, nó chống lại sự giảm của dòng điện và làm cho dòng điện giảm theo hàm mũ. Đồ thị của dòng điện trong mạch theo thời gian (hình 32.5) cho thấy dòng điện giảm theo thời gian một cách liên tục.



Hình 32.5: Đồ thị dòng điện theo thời gian đối với vòng bên tay phải của mạch điện hình 32.2. Lúc  $t < 0$  khóa  $S_2$  ở vị trí a.

**Câu hỏi 32.2:** Xét mạch điện như trên hình 32.2 với khoá  $S_1$  mở và khoá  $S_2$  ở vị trí a. Bây giờ đóng khoá  $S_1$ . (i) Tại thời điểm đóng mạch thì điện áp qua phần tử dòng điện nào bằng với suất điện động của nguồn điện? (a) điện trở, (b) cuộn cảm, (c) cả cuộn cảm và điện trở. (ii) Một thời dài sau khi đóng mạch thì điện áp qua phần tử dòng điện nào bằng với suất điện động của nguồn điện? (a) điện trở, (b) cuộn cảm, (c) cả cuộn cảm và điện trở.

### Bài tập mẫu 32.2. Hằng số thời gian của mạch RL

Xét lại mạch điện trên hình 32.2. Giả sử các phần tử của mạch điện này có giá trị như sau:  $\mathcal{E} = 12V$ ,  $R = 6\Omega$ ,  $L = 30\text{mH}$ .

(A) Hãy tìm hằng số thời gian của mạch điện.

**Giải:**

Từ công thức 32.8 ta có hằng số thời gian là:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30,0 \times 10^{-3} \text{H}}{6,0\Omega} = 5,0 \text{ms}$$

(B) Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , khoá  $S_1$  đóng, khoá  $S_2$  ở vị trí a. Hãy tính dòng điện trong mạch tại thời điểm  $t = 2,0 \text{ms}$ .

**Giải:**

Dòng điện trong mạch tại thời điểm  $t = 2,0 \text{ ms}$  được xác định từ công thức 32.7:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12,0\text{V}}{6,0\Omega}(1 - e^{-2,0\text{ms}/5,0\text{ms}}) = 0,659 \text{ A}$$

(C) Hãy so sánh điện áp qua điện trở và điện áp qua cuộn cảm.

**Giải:**

Tại thời điểm đóng khoá  $S_1$  được đóng, dòng điện trong mạch bằng 0 và do đó điện áp qua điện trở cũng bằng 0. Tại thời điểm này điện áp của ắc quy qua cuộn cảm dưới dạng suất điện động ngược có độ lớn 12,0 V vì cuộn cảm đang cố gắng duy trì trạng thái dòng điện bằng 0. Sau đó suất điện động qua cuộn cảm giảm còn điện áp qua điện trở tăng. Tổng của hai điện áp này luôn bằng 12 V.

### Năng lượng từ trường

33.3 Nguồn điện trong mạch điện chứa cuộn cảm phải cung cấp nhiều năng lượng hơn nguồn điện trong mạch không có cuộn cảm. Xét hình 32.2 với khóa  $S_2$  ở vị trí a. Khi khóa  $S_1$  được đóng, phần năng lượng do nguồn điện cung cấp xuất hiện như là nội năng của điện trở trong mạch, và phần năng lượng còn lại được lưu trữ trong từ trường của cuộn cảm. Nhân mỗi số hạng trong phương trình 32.6 với  $i$  và sắp xếp lại các số hạng, ta có:

$$i\mathcal{E} = i^2R + Li \frac{di}{dt} \quad (32.11)$$

Biết rằng  $i\mathcal{E}$  là tốc độ cung cấp năng lượng của nguồn điện, và  $i^2R$  là tốc độ cung cấp năng lượng cho điện trở, ta thấy rằng  $Li \frac{di}{dt}$  phải biểu diễn tốc độ mà năng lượng được tích trữ trong cuộn cảm. Nếu  $U$  là năng lượng được tích trữ trong cuộn cảm tại thời điểm bất kì thì tốc độ tích trữ năng lượng  $dU/dt$  là:

$$\frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

Để tìm năng lượng toàn phần được tích trữ trong cuộn cảm tại thời điểm bất kì, ta bỏ  $dt$  ở mẫu số của phương trình trên rồi lấy tích phân:

$$U = \int dU = \int_0^I Lidi = L \int_0^I idi$$
$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (32.12)$$

**là năng lượng được tích trữ trong cuộn cảm**, trong đó  $L$  là hằng số và được đưa ra ngoài dấu tích phân. Phương trình 32.12 biểu diễn năng lượng được tích trữ trong từ trường của cuộn cảm khi dòng điện là  $I$ . Nó có dạng tương tự với phương trình  $U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$  đối với năng lượng được tích trữ trong điện trường của tụ điện.



Ta hãy xác định mật độ năng lượng của một từ trường. Để đơn giản, ta xét một ống dây solenoid có độ tự cảm được cho bởi phương trình 32.5. Từ trường của ống dây solenoid được tính theo phương trình 30.14:

$$B = \mu_0 ni$$

Thay biểu thức của  $L$  và  $i = B / \mu_0 n$  vào phương trình 32.12 ta có:

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} V \quad (32.13)$$

Mật độ năng lượng từ trường, hay năng lượng được tích trữ trong một đơn vị thể tích trong từ trường của một cuộn cảm là  $u_B = \frac{U_B}{V}$ , hoặc:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (32.14)$$

### là mật độ năng lượng từ trường.

Mặc dù biểu thức này được rút ra từ trường hợp đặc biệt của ống dây solenoid, nhưng nó cũng đúng đối với vùng không gian bất kỳ có từ trường. Phương trình 32.14 có dạng tương tự như phương trình  $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  đối với năng lượng điện trường được tích trữ trong một đơn vị thể tích. Trong cả hai trường hợp, mật độ năng lượng tỉ lệ thuận với bình phương độ lớn của trường.

---

**Câu hỏi 32.3:** Giả sử bạn đang thực hiện một thí nghiệm trong đó yêu cầu mật độ năng lượng từ trường bên trong một solenoid càng lớn càng tốt. Solenoid rất dài và mang dòng điện. Sự điều chỉnh nào sẽ làm tăng mật độ năng lượng từ trường? (Có thể có nhiều câu trả lời đúng.) (a) Tăng số vòng trên một đơn vị độ dài của solenoid (b) tăng tiết diện của solenoid (c) tăng chiều dài của solenoid trong khi giữ cố định số vòng dây trên một đơn vị dài (d) tăng dòng điện chạy qua solenoid.

---

### Bài tập mẫu 32.3 Điều gì xảy ra với năng lượng trong cuộn cảm?

Xét lại mạch điện RL trên hình 32.2, với khoá  $S_2$  ở vị trí a và dòng điện trong mạch đã đạt tới giá trị cực đại ổn định. Khi  $S_2$  được chuyển qua vị trí b, dòng điện trong vòng mạch bên phải giảm theo hàm mũ theo công thức  $i = I_i e^{-t/\tau}$ . Hãy chứng tỏ rằng tất cả năng lượng lúc đầu được tích trữ trong từ trường của cuộn cảm được chuyển thành nội năng của điện trở khi dòng điện giảm về 0.

#### Giải:

Khi khoá  $S_2$  ở vị trí a, năng lượng từ ắc quy được cung cấp cho điện trở với tốc độ không đổi và một phần được tích trữ trong từ trường của cuộn cảm. Khi  $S_2$  được chuyển qua vị trí b, ắc quy không còn cung cấp năng lượng cho điện trở mà chỉ còn

cuộn cảm cung cấp năng lượng cho điện trở. Ta xét hệ là mạch vòng bên phải, là hệ cô lập nên năng lượng chỉ được trao đổi giữa các thành phần của hệ.

Năng lượng được cung cấp cho điện trở xuất hiện dưới dạng nội năng của điện trở. Từ phương trình 27.19 và để ý rằng tốc độ biến thiên nội năng của điện trở chính là công suất cung cấp cho điện trở:

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dt} = P = i^2 R$$

Thay công thức dòng điện (32.10) vào phương trình này ta được:

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dt} = P = (I_i e^{-Rt/L})^2 R = I_i^2 R e^{-2Rt/L}$$

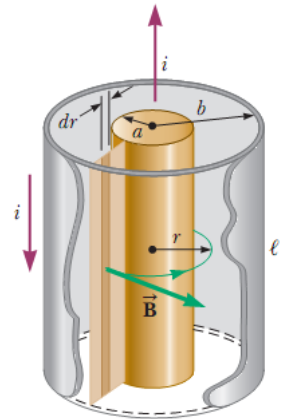
Tính  $dE_{\text{int}}$  và tích phân nó từ  $t = 0$  đến  $t \rightarrow \infty$  ta được:

$$E_{\text{int}} = \int_0^{\infty} I_i^2 R e^{-2Rt/L} dt = I_i^2 R \int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt = I_i^2 R \left( \frac{L}{2R} \right) = \frac{1}{2} L I_i^2$$

Năng lượng này bằng năng lượng ban đầu trong từ trường của cuộn cảm.

### Bài tập mẫu 32.4 Cáp đồng trục

Cáp đồng trục thường được dùng để kết nối các thiết bị điện tử và thu tín hiệu trong các hệ thống cáp tivi. Mô hình hoá dây cáp đồng trục gồm 2 vật dẫn là vỏ hình trụ mỏng dẫn điện bán kính  $b$  ghép đồng trục với một ruột hình trụ đặc bán kính  $a$  như hình 32.7. Các vật dẫn này mang dòng điện cùng độ lớn  $I$  nhưng ngược chiều nhau. Hãy tính độ tự cảm  $L$  của một đoạn cáp có chiều dài  $l$ .



Hình 32.7 Bài tập mẫu 32.4

**Giải:**

Ta phải tính từ thông qua hình chữ nhật màu vàng nhạt trên hình 32.7. Theo định luật Ampe, từ thông này chỉ do từ trường  $B = \mu_0 I / 2\pi r$  của vật dẫn bên trong gây ra. Ta chia hình chữ nhật này thành các phần nhỏ hình chữ nhật có bề rộng  $dr$ . Từ thông qua mỗi phần nhỏ này là:

$$d\Phi_B = B dA = B l dr$$

Thay vào biểu thức tính từ trường và tích phân trên toàn bộ diện tích hình chữ nhật màu vàng nhạt ta được:

$$\Phi_B = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sử dụng công thức 32.2 ta tính được độ tự cảm của dây cáp:

$$L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

### Hệ số hổ cảm

Thông thường, từ thông qua diện tích giới hạn bởi một vòng dây biến thiên theo thời gian do các dòng điện biến thiên theo thời gian chạy trong các vòng dây bên cạnh. Tình huống này gây ra một suất điện động thông qua quá trình gọi là *hiện tượng hổ cảm*, được đặt tên như vậy vì nó phụ thuộc vào sự tương tác của hai dòng điện.

Xét mặt cắt hai cuộn dây đặt gần nhau như trên hình 32.8. Dòng điện  $i_1$  trong cuộn 1, gồm có  $N_1$  vòng dây, gây ra một từ trường. Một số đường sức từ đi qua cuộn 2 gồm có  $N_2$  vòng dây. Từ thông gây bởi dòng điện trong cuộn 1 và đi qua cuộn 2 được biểu diễn bởi  $\Phi_{12}$ . Tương tự phương trình 32.2, ta có thể xem **hệ số hổ cảm**  $M_{12}$  của cuộn 2 liên quan tới cuộn 1 là:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} \quad (32.15)$$

Hệ số hổ cảm phụ thuộc vào hình dạng của cả hai cuộn dây và sự bố trí của chúng so với nhau. Khi khoảng cách giữa hai cuộn dây tăng thì hệ số hổ cảm giảm vì từ thông liên kết giữa các cuộn dây giảm.

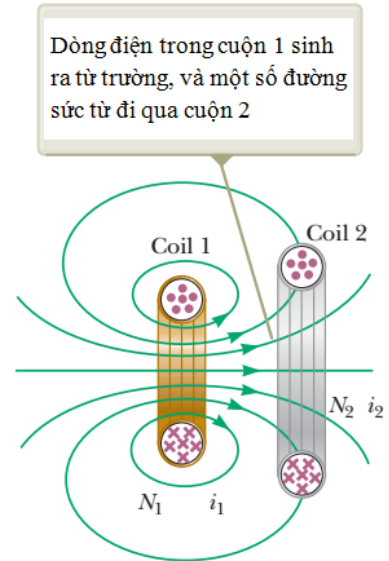
Nếu dòng điện  $i_1$  thay đổi theo thời gian thì từ định luật Faraday và phương trình 32.15 ta thấy rằng suất điện động cảm ứng gây bởi cuộn 1 trong cuộn 2 là:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{M_{12} i_1}{N_2} \right) = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad (32.16)$$

Trên đây ta đã giả sử dòng điện chạy trong cuộn 1. Bây giờ ta giả sử có dòng điện  $i_2$  chạy trong cuộn 2. Lập luận ở như trên ta thấy rằng có hệ số hổ cảm  $M_{21}$ . Nếu dòng điện  $i_2$  thay đổi theo thời gian, suất điện động gây bởi cuộn 2 trong cuộn 1 là:

$$\mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (32.17)$$

Trong hiện tượng hổ cảm, suất điện động sinh ra trong một cuộn dây luôn tỉ lệ thuận với tốc độ biến thiên của dòng điện trong cuộn dây kia. Mặc dù các hằng số tỉ lệ  $M_{12}$  và  $M_{21}$  được xem xét một cách riêng rẽ, nhưng có thể chỉ ra rằng chúng bằng nhau. Do đó, với  $M_{12} = M_{21} = M$ , các phương trình 32.16 và 32.17 trở thành:



Hình 32.8: Mặt cắt ngang của 2 cuộn dây đặt gần nhau.

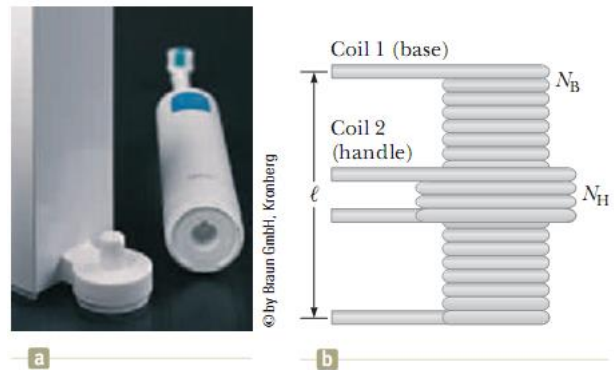
$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{và} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

Hai phương trình này có dạng tương tự như phương trình 32.1 đối với suất điện động tự cảm,  $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$ . Đơn vị của hệ số hồ cảm là Henry.

**Câu hỏi 32.4:** Trên hình 32.8, di chuyển cuộn dây 1 lại gần cuộn 2. Sự định hướng của các cuộn dây vẫn giữ như cũ. Sự di chuyển này sẽ làm cho hệ số tự cảm giữa 2 cuộn dây (a) tăng (b) giảm và (c) không thay đổi.

### Bài tập mẫu 32.5: Bộ sạc “không dây”

Bàn chải đánh răng điện có để được thiết kế để giữ cho cán bàn chải đứng khi không sử dụng. Như thấy trên hình 32.9a, cán có một lỗ hình trụ để hình trụ trên để cắm vào. Khi cán bàn chải được cắm vào để thì dòng điện biến thiên trong một solenoid bên trong hình trụ ở để sinh ra một dòng điện bên trong cuộn dây trong cán bàn chải. Dòng điện cảm ứng này sạc cho pin bên trong cán. Ta mô hình hoá cái để như một cuộn solenoid có chiều dài  $l$  gồm  $N_B$  vòng (hình 32.9b) mang dòng điện  $I$  và có tiết diện  $A$ . Cuộn dây trong cán gồm  $N_H$  vòng và bao quanh cuộn ở để như trên hình vẽ. Hãy tìm hệ số hồ cảm của hệ.



Hình 32.9: Bài tập 32.5. (a) Bàn chải đánh răng điện này sử dụng sự hồ cảm giữa các ống dây solenoid để sạc pin cho nó. (b) Cuộn  $N_H$  vòng dây quấn quanh tâm cuộn  $N_B$  vòng.

### Giải:

Từ trường bên trong ống dây solenoid trong phần để tính theo công thức 30.14 là:

$$B = \mu_0 \frac{N_B}{l} i$$

Hệ số hồ cảm được tính theo công thức:

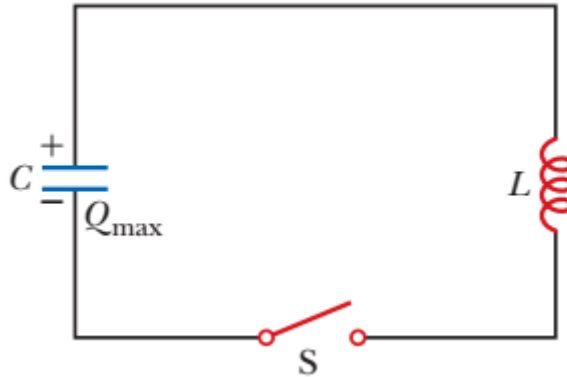
$$M = \frac{N_H \Phi_{BH}}{i} = \frac{N_H BA}{i} = \mu_0 \frac{N_B N_H}{l} A$$

trong đó  $\Phi_{BH} = BA$  là từ thông qua cuộn dây ở cán do từ trường của cuộn ở để gây ra.

Sạc không dây được dùng trong một số thiết bị chẳng hạn như các nhà sản xuất xe hơi điện, để tránh sự tiếp xúc trực tiếp giữa xe và bộ sạc là các thiết bị kim loại.

## Các dao động trong mạch LC

33.5



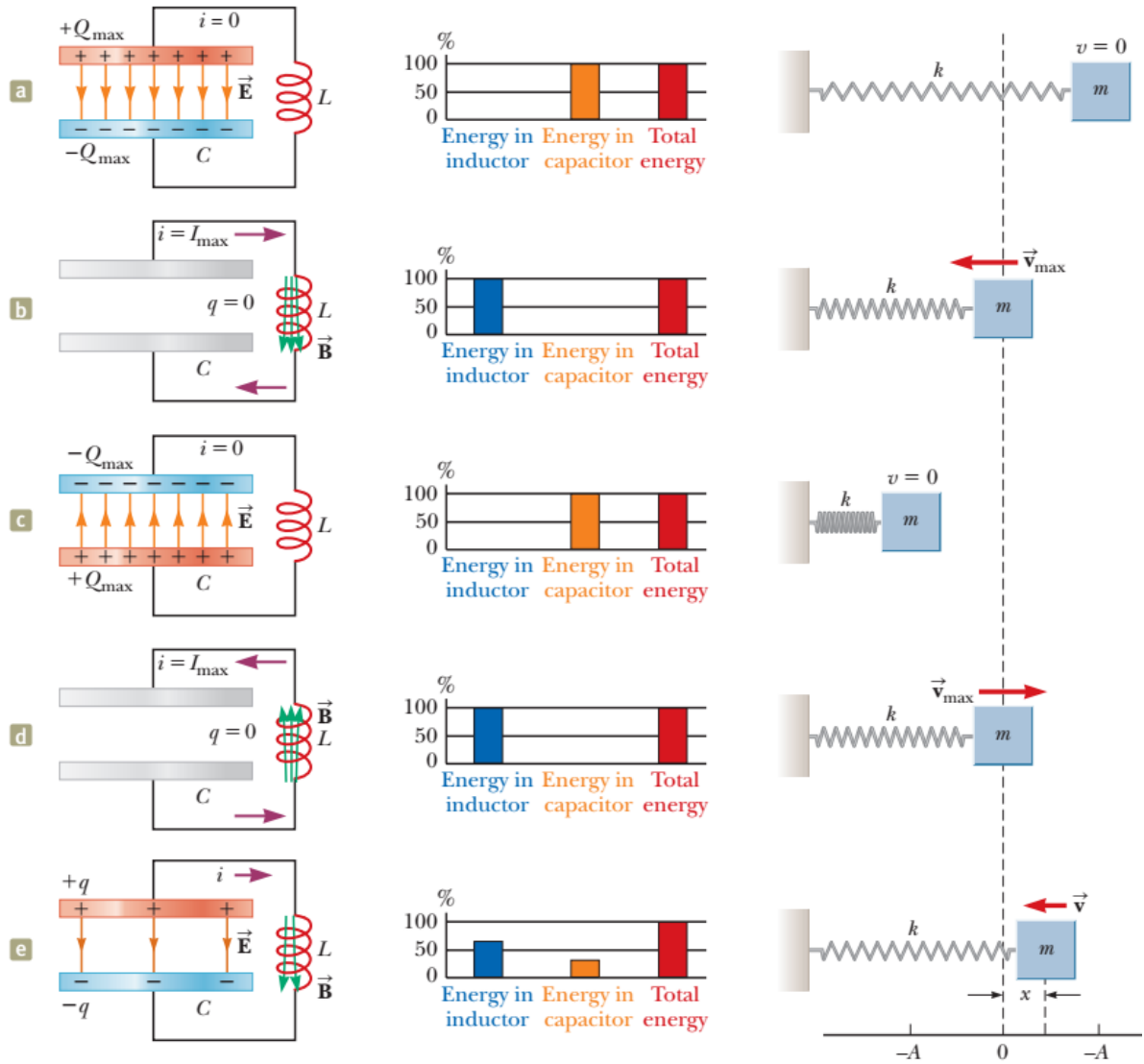
Hình 32.10: Mạch LC đơn giản. Tụ điện có điện tích ban đầu bằng  $Q_{\max}$ , khóa S được mở đối với  $t < 0$  và sau đó được đóng tại  $t = 0$ .

Khi tụ điện được nối với cuộn cảm như minh họa trên hình 32.10 thì tổ hợp này là một **mạch LC**. Nếu ban đầu tụ điện được tích điện và sau đó khóa S được đóng, thì cả dòng điện trong mạch và điện tích của tụ điện dao động giữa các giá trị âm và dương của giá trị cực đại của chúng. Nếu điện trở của mạch bằng không thì không có năng lượng được chuyển hóa thành nội năng. Trong các phân tích tiếp theo thì điện trở của mạch được bỏ qua. Ta cũng lí tưởng hóa là năng lượng không bị bức xạ ra khỏi mạch. Cơ chế bức xạ này được thảo luận trong chương 34.

Giả sử tụ điện có điện tích ban đầu là  $Q_{\max}$  (điện tích cực đại), và khóa được mở đối với  $t < 0$  và sau đó được đóng tại thời điểm  $t = 0$ . Ta hãy khảo sát điều gì xảy ra theo quan điểm năng lượng.

Khi tụ điện được nạp đầy, năng lượng  $U$  trong mạch được tích trữ trong điện trường của tụ điện và bằng  $Q_{\max}^2 / 2C$ . Tại thời điểm này dòng điện trong mạch bằng không; do đó, không có năng lượng nào được tích trữ trong cuộn cảm. Sau khi khóa S được đóng, tốc độ điện tích rời khỏi hoặc đi vào các bản tụ (cũng là tốc độ thay đổi điện tích trên tụ) bằng dòng điện trong mạch. Sau khi khóa được đóng và tụ điện bắt đầu phóng điện, năng lượng được tích trữ trong điện trường của tụ suy giảm. Sự phóng điện của tụ điện tương ứng với một dòng điện trong mạch, và lúc này một phần năng lượng được tích trữ trong từ trường của cuộn cảm. Do đó năng lượng được chuyển từ điện trường của tụ điện sang từ trường của cuộn cảm. Khi tụ phóng hết điện tích thì nó không tích trữ năng lượng. Lúc này dòng điện đạt tới giá trị cực đại và tất cả năng lượng trong mạch được tích trữ trong cuộn cảm. Dòng điện tiếp tục chạy theo chiều như cũ, nhưng giảm về độ lớn; tụ điện cuối cùng được nạp đầy lại, nhưng sự phân cực của các bản tụ ngược với sự phân cực ban đầu. Quá trình này được tiếp theo bởi sự phóng điện khác cho đến khi mạch trở lại tới trạng thái điện tích cực đại  $Q_{\max}$  ban đầu và phân cực bản tụ như được chỉ ra trên hình 32.10. Năng lượng tiếp tục dao động giữa cuộn cảm và tụ điện.

Các dao động của mạch LC là dao động điện từ, tương tự như dao động cơ của chất điểm chuyển động điều hòa đơn giản đã tìm hiểu ở chương 15. Phần lớn những điều đã thảo luận ở đó có thể áp dụng được cho các dao động LC. Ví dụ, ta đã nghiên cứu tác động của việc phát động dao động tử cơ học bằng một ngoại lực dẫn đến hiện tượng cộng hưởng. Hiện tượng cộng hưởng cũng quan sát được trong mạch LC (xem mục 33.7).



Hình 32.11: Sự chuyển đổi năng lượng trong một mạch LC không có điện trở và không bức xạ. Tự điện có điện tích  $Q_{\max}$  tại  $t = 0$ , tại thời điểm đó khóa  $S$  trên hình 32.10 được đóng. Mạch này dao động tương tự như dao động điều hòa của chất điểm trong cơ học, được biểu thị bằng hệ vật-lò xo ở bên phải của các hình vẽ (a)-(d). Tại các thời điểm đặc biệt, tất cả năng lượng của mạch tập trung trong một trong các phần tử của mạch điện. (e) Tại thời điểm bất kì, năng lượng được phân chia giữa tụ điện và cuộn cảm.

Sự truyền năng lượng trong mạch LC được mô tả trên hình 32.11. Hoạt động của mạch này tương tự như hoạt động của chất điểm trong dao động điều hòa đã nghiên cứu ở chương 15. Ví dụ, xét hệ vật – lò xo với các dao động của hệ được biểu thị ở phần bên phải của hình 32.11. Thế năng  $\frac{1}{2}kx^2$  được tích trữ trong lò xo bị kéo dãn tương tự như thế năng  $Q_{max}^2 / 2C$  tích trữ trong tụ điện trên hình 32.11. Động năng  $\frac{1}{2}mv^2$  của vật chuyển động tương tự như năng lượng từ trường  $\frac{1}{2}Li^2$  tích trữ trong cuộn cảm, trong đó yêu cầu có các điện tích chuyển động. Trên hình 32.11a, tất cả năng lượng được tích trữ dưới dạng thế năng điện trường trong tụ điện tại  $t = 0$  (vì  $i = 0$ ), giống như tất cả năng lượng trong hệ vật – lò xo ban đầu được tích trữ là thế năng của lò xo nên nó bị kéo dãn và thả ra tại  $t = 0$ . Trên hình 32.11b, tất cả năng lượng được tích trữ là năng lượng từ trường  $\frac{1}{2}LI_{max}^2$  trong cuộn cảm, trong đó  $I_{max}$  là dòng điện cực đại. Các hình 32.11c và 32.11d mô tả các tình huống xảy ra sau  $\frac{1}{4}$  chu kì trong đó năng lượng tất cả đều là năng lượng điện trường hoặc năng lượng từ trường. Tại các điểm trung gian, một phần năng lượng là điện trường, một phần là từ trường.

Xét thời điểm  $t$  bất kì sau khi khóa S được đóng sao cho tụ điện có điện tích  $q < Q_{max}$  và dòng điện  $i < I_{max}$ . Tại thời điểm này cả tụ điện và cuộn cảm đều tích trữ năng lượng như chỉ ra trên hình 32.11e, nhưng tổng của năng lượng điện trường và năng lượng từ trường phải bằng năng lượng toàn phần  $U$  lúc đầu tích trữ trong tụ điện được nạp đầy tại  $t = 0$ :

$$U = U_E + U_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{Q_{max}^2}{2C} \quad (32.18)$$

là **năng lượng toàn phần** được tích trữ trong mạch LC

Vì ta giả sử điện trở của mạch bằng không và bỏ qua sự bức xạ điện từ nên không có năng lượng nào được chuyển thành nội năng cũng như truyền ra khỏi hệ mạch điện. Do đó, với các giả thiết này hệ mạch điện được cô lập: *năng lượng toàn phần của hệ không đổi theo thời gian*. Ta mô tả năng lượng không thay đổi của hệ về mặt toán học bằng cách đặt  $dU/dt = 0$ . Do đó, bằng cách lấy đạo hàm phương trình 32.18 theo thời gian với chú ý rằng  $q$  và  $i$  thay đổi theo thời gian ta có:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2 \right) = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0 \quad (32.19)$$

Ta có thể viết phương trình này về phương trình vi phân một biến, vì dòng điện trong mạch bằng với tốc độ thay đổi điện tích trong tụ điện:  $i = dq/dt$ , nên  $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ . Thay các mối liên hệ này vào phương trình 32.19 ta có:

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \quad (32.20)$$

Giải phương trình này đối với ẩn số  $q$  bằng cách lưu ý rằng phương trình này có cùng dạng với các phương trình đối với chất điểm chuyển động điều hòa là:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x$$

Trong đó  $k$  là độ cứng của lò xo,  $m$  là khối lượng của vật và  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Nghiệm của phương trình này có dạng tổng quát là:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

Trong đó  $A$  là biên độ của chuyển động điều hòa đơn giản (giá trị cực đại của  $x$ ),  $\omega$  là tần số góc của chuyển động này, và  $\phi$  là hằng số pha; các giá trị của  $A$  và  $\phi$  phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu. Vì phương trình 32.20 có cùng dạng toán học với phương trình vi phân của dao động tử điều hòa đơn giản, nên nó có nghiệm:

$$q = Q_{\max}\cos(\omega t + \phi) \quad (32.21)$$

Trong đó  $Q_{\max}$  là điện tích cực đại của tụ điện, và tần số góc là:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.22)$$

Chú ý rằng tần số góc của các dao động chỉ phụ thuộc vào độ tự cảm và điện dung của mạch. Phương trình 32.22 cho ta *tần số riêng* của dao động của mạch LC.

Vì  $q$  thay đổi hình sin theo thời gian nên dòng điện trong mạch cũng thay đổi theo hình sin. Ta có thể chỉ ra rằng bằng cách lấy vi phân phương trình 32.21 theo thời gian:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q_{\max}\sin(\omega t + \phi) \quad (32.23)$$

Để xác định giá trị của góc pha, ta kiểm tra các điều kiện ban đầu, trong đó đòi hỏi tại  $t = 0$ ,  $i = 0$  và  $q = Q_{\max}$ . Đặt  $i = 0$  tại  $t = 0$  trong phương trình 32.23 ta có:

$$0 = -\omega Q_{\max}\sin\phi$$

cho thấy  $\phi = 0$ . Giá trị này của  $\phi$  cũng phù hợp với phương trình 32.21 và điều kiện  $q = Q_{\max}$  tại  $t = 0$ . Do đó, trong trường hợp này các biểu thức của  $i$  và  $q$  là:

$$q = Q_{\max}\cos\omega t \quad (32.24)$$

$$i = -\omega Q_{\max}\sin\omega t = -I_{\max}\sin\omega t \quad (32.25)$$

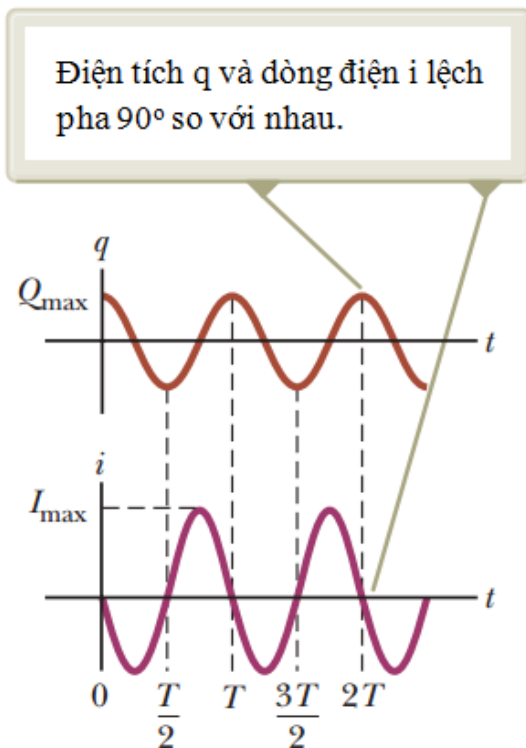
Các đồ thị của  $q$  theo  $t$  và  $i$  theo  $t$  được cho trên hình 32.12. Điện tích trên tụ điện dao động giữa các cực trị  $Q_{\max}$  và  $-Q_{\max}$ , và dòng điện dao động giữa các cực trị  $I_{\max}$  và  $-I_{\max}$ . Hơn nữa, dòng điện lệch pha  $90^\circ$  so với điện tích. Tức là khi điện tích cực đại thì dòng điện bằng không, và khi điện tích bằng không thì dòng điện cực đại.

Trở lại sự thảo luận về năng lượng của mạch LC. Thay các phương trình 32.24 và 32.25 vào phương trình 32.18, ta thấy năng lượng toàn phần là:

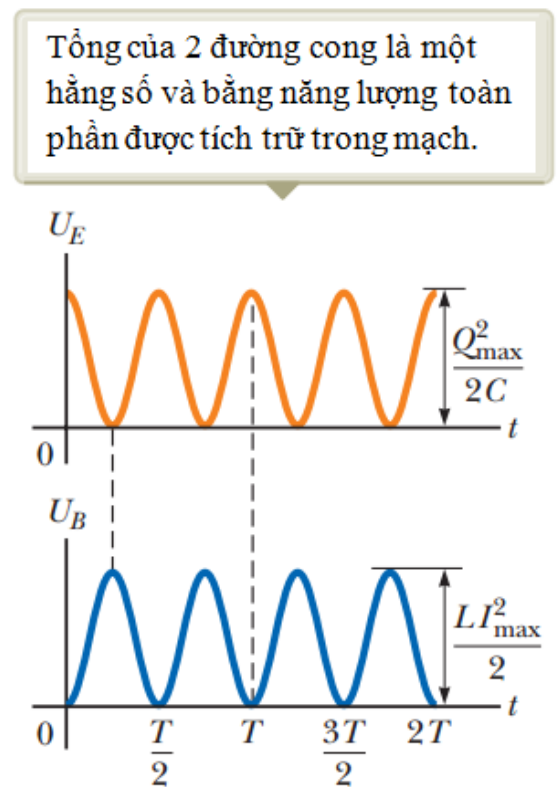


$$U = U_E + U_B = \frac{Q_{\max}^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} LI_{\max}^2 \sin^2 \omega t \quad (32.26)$$

Phương trình này chứa tất cả các đặc trưng được mô tả một cách định tính ở phần đầu của mục này. Nó chỉ ra rằng năng lượng của mạch LC dao động một cách liên tục giữa năng lượng được tích trữ trong điện trường của tụ điện và năng lượng được tích trữ trong từ trường của cuộn cảm. Khi năng lượng được tích trữ trong tụ điện đạt giá trị cực đại  $Q_{\max}^2 / 2C$  thì năng lượng được tích trữ trong cuộn cảm bằng không. Khi năng lượng được tích trữ trong cuộn cảm đạt giá trị cực đại  $\frac{1}{2} LI_{\max}^2$  thì năng lượng được tích trữ trong tụ điện bằng không.



Hình 32.12: Các đồ thị của điện tích và dòng điện theo thời gian của một mạch LC không có điện trở và không bức xạ.



Hình 32.13: Các đồ thị của  $U_E$  và  $U_B$  theo thời gian của một mạch LC không có điện trở và không bức xạ.

Các đồ thị về sự biến thiên theo thời gian của  $U_E$  và  $U_B$  được cho trên hình 32.13. Tổng  $U_E + U_B$  là một hằng số và bằng năng lượng toàn phần  $Q_{\max}^2 / 2C$  hoặc  $\frac{1}{2} LI_{\max}^2$ . Việc kiểm tra lại là không phức tạp. Các biên độ của hai đồ thị trên hình 32.13 phải bằng nhau vì năng lượng cực đại tích trữ trong tụ điện (khi  $i=0$ ) phải bằng năng lượng cực đại tích trữ trong cuộn cảm (khi  $q=0$ ). Sự cân bằng này được biểu diễn toán học như là:

$$\frac{Q_{\max}^2}{2C} = \frac{1}{2} LI_{\max}^2$$

Sử dụng biểu thức này trong phương trình 32.26 đối với năng lượng toàn phần ta có:

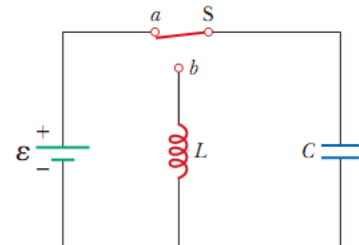
$$U = \frac{Q_{\max}^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{Q_{\max}^2}{2C} \quad (32.27)$$

Trong trường hợp được lí tưởng hóa của ta, các dao động trong mạch tiếp tục một cách vô hạn; tuy nhiên năng lượng toàn phần  $U$  của mạch không đổi chỉ khi sự bức xạ năng lượng ra ngoài và sự chuyển hóa năng lượng thành nhiệt được bỏ qua. Các mạch thực tế luôn có một giá trị điện trở nào đó và do đó một phần năng lượng bị chuyển hóa thành nội năng. Ta đã nói ở phần đầu của mục này là có thể bỏ qua sự bức xạ từ mạch. Trong thực tế, sự bức xạ là không thể tránh được trong kiểu mạch này, và năng lượng toàn phần trong mạch liên tục suy giảm do quá trình bức xạ.

**Câu hỏi 32.5:** (i) Tại một thời điểm trong quá trình mạch LC dao động, dòng điện đạt giá trị cực đại. Tại thời điểm này thì điều gì xảy ra với điện áp qua tụ điện? (a) Nó khác điện áp qua cuộn cảm. (b) Nó bằng 0. (c) Nó đạt giá trị cực đại. (d) Không thể xác định được. (ii) Bây giờ xét tại thời điểm mà dòng điện có giá trị tức thời bằng 0. Tại thời điểm này thì điều gì xảy ra với độ lớn của điện áp qua tụ điện? (a) Nó khác điện áp qua cuộn cảm. (b) Nó bằng 0. (c) Nó đạt giá trị cực đại. (d) Không thể xác định được.

### Bài tập mẫu 32.6: Các dao động trong mạch LC

Trên hình 32.14, ắc quy có suất điện động 12 V, độ tự cảm của cuộn dây là 2,81 mH và điện dung của tụ điện là 9,0 pF. Khoá  $S$  đã được đặt ở vị trí  $a$  một thời gian dài để cho tụ điện được nạp đầy. Bây giờ chuyển khoá  $S$  sang vị trí  $b$ , ngắt ắc quy khỏi mạch điện và nối trực tiếp tụ điện với cuộn cảm.



Hình 32.14: Ban đầu tụ điện được nạp đầy với khoá  $S$  ở vị trí  $a$ . Sau đó khoá  $S$  được chuyển sang vị trí  $b$ , ắc quy bị ngắt khỏi mạch.

- (A) Hãy tìm tần số dao động của mạch.  
 (B) Hỏi giá trị cực đại của điện tích và của dòng điện trong mạch?

#### Giải:

(A) Khi chuyển khoá  $S$  sang vị trí  $b$  phần hoạt động của mạch là vòng bên phải, là một mạch LC. Tần số dao động của mạch được tính theo công thức 32.22:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Thay số ta được:

$$f = \frac{1}{2\pi \left[ (2,81 \times 10^{-3} H)(9,0 \times 10^{-12} F) \right]^{1/2}} = 1,0 \times 10^6 \text{ Hz}$$

(B) Điện tích cực đại chính bằng điện tích ban đầu trên tụ điện:

$$Q_{\max} = C \Delta V = (9,0 \times 10^{-12} F)(12V) = 1,08 \times 10^{-10} C$$

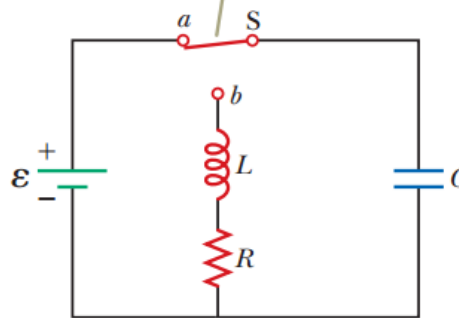
Dòng điện cực đại được tính từ điện tích cực đại theo phương trình 32.25:

$$I_{\max} = \omega Q_{\max} = 2\pi f Q_{\max} = (2\pi \times 10^6 s^{-1})(1,08 \times 10^{-10} C) = 6,79 \times 10^{-4} A$$

## Mạch RLC

33.6

Khóa S lúc đầu được đặt tại vị trí a, và tụ điện được tích điện. Sau đó khóa S được chuyển sang vị trí b.



Hình 32.15: Mạch RLC nối tiếp.

Một mạch thực tế hơn gồm điện trở, cuộn cảm và tụ điện được mắc như trên hình 32.15. Giả sử điện trở của cái điện trở là điện trở của cả mạch. Giả sử khóa S ở vị trí a sao cho điện tích lúc đầu của tụ điện bằng  $Q_{\max}$ . Bây giờ khóa S được chuyển sang vị trí b. Lúc này năng lượng toàn phần được tích trữ trong tụ điện và trong cuộn cảm là  $Q_{\max}^2 / 2C$ . Tuy nhiên năng lượng toàn phần này không còn là hằng số như trong trường hợp mạch LC vì điện trở gây ra sự chuyển năng lượng thành nội năng. (Ta tiếp tục bỏ qua sự bức xạ năng lượng từ mạch trong trường hợp này). Do tốc độ chuyển hóa năng lượng thành nội năng bên trong điện trở là  $i^2R$  nên:

$$\frac{dU}{dt} = -i^2R$$

Dấu âm biểu thị năng lượng U của mạch giảm theo thời gian. Thay  $U = U_E + U_B$  ta có:

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = -i^2R \quad (32.28)$$

Để chuyển phương trình này về dạng cho phép so sánh được dao động điện với dao động cơ, trước tiên ta dùng  $i = dq/dt$  và đưa tất cả các số hạng sang về trái để thu được:

$$Li \frac{d^2q}{dt^2} + i^2 R + \frac{q}{C} i = 0$$

Bây giờ chia cho  $i$ :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + iR + \frac{q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (32.29)$$

Mạch RLC tương tự như dao động tử điều hòa tắt dần đã thảo luận trong mục 15.6. Phương trình chuyển động của hệ vật-lò xo dao động tắt dần là:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (32.30)$$

So sánh các phương trình 32.29 và 32.30 ta thấy rằng  $q$  tương ứng với vị trí  $x$  của vật tại thời điểm bất kỳ,  $L$  tương ứng với khối lượng  $m$  của vật,  $R$  tương ứng với hệ số tắt dần  $b$ ,  $C$  tương ứng với  $1/k$ , trong đó  $k$  là độ cứng của lò xo. Các mối liên hệ này và một số mối liên hệ khác được liệt kê trong bảng 32.1.

*Bảng 32.1: Sự tương tự giữa mạch RLC và chất điểm dao động điều hòa đơn giản*

Mạch RLC		Chất điểm dao động điều hòa 1 chiều đơn giản
Điện tích	$q \leftrightarrow x$	Vị trí
Dòng điện	$i \leftrightarrow v_x$	Vận tốc
Hiệu điện thế	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Lực
Điện trở	$R \leftrightarrow b$	Hệ số tắt dần nhớt
Điện dung	$C \leftrightarrow 1/k$	$k =$ độ cứng của lò xo
Độ tự cảm	$L \leftrightarrow m$	Khối lượng
Dòng điện = đạo hàm theo thời gian của điện tích Tốc độ thay đổi của dòng điện = đạo hàm bậc 2 theo thời gian của điện tích	$i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$ $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Vận tốc = đạo hàm theo thời gian của vị trí Gia tốc = đạo hàm bậc 2 theo thời gian của vị trí
Năng lượng trong cuộn cảm	$U_B = \frac{1}{2} LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2} mv^2$	Động năng của vật chuyển động

Năng lượng trong tụ điện	$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2} kx^2$	Thế năng tích trữ trong lò xo
Tốc độ mất năng lượng do điện trở	$i^2 R \leftrightarrow bv^2$	Tốc độ mất mát năng lượng do ma sát
Mạch RLC	$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \leftrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$	Vật-lò xo dao động tắt dần

Vì nghiệm giải tích của phương trình 32.29 rất cồng kềnh, nên ta chỉ đưa ra một sự mô tả định tính về sự hoạt động của mạch. Trong trường hợp đơn giản nhất, khi  $R = 0$ , phương trình 32.29 trở thành phương trình của mạch LC đơn giản, và điện tích và dòng điện dao động hình sin theo thời gian. Trường hợp này tương đương với việc loại trừ tất cả các tắt dần trong dao động tử cơ học.

Khi  $R$  nhỏ, trường hợp này tương tự như sự tắt dần chậm của dao động tử cơ học, nghiệm của phương trình 32.29 là:

$$q = Q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad (32.31)$$

Trong đó  $\omega_d$  là tần số góc dao động của mạch, được cho bởi:

$$\omega_d = \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (32.32)$$

Tức là giá trị điện tích trên tụ điện dao động điều hòa tắt dần tương tự như hệ vật-lò xo đang chuyển động trong một môi trường nhớt. Phương trình 32.32 chỉ ra rằng khi  $R \ll \sqrt{4L/C}$  (để số hạng thứ 2 trong dấu ngoặc vuông nhỏ hơn số hạng đầu) thì tần số  $\omega_d$  của dao động tử tắt dần gần với tần số của dao động tử không tắt dần,  $1/\sqrt{LC}$ . Vì  $i = dq/dt$  nên dòng điện cũng chịu một dao động điều hòa tắt dần. Đồ thị của điện tích theo thời gian đối với dao động tử tắt dần được cho trên hình 32.16a, và một hình chụp từ máy hiện sóng đối với một mạch RLC thực tế được cho trên hình 32.16b. Giá trị cực đại của  $q$  giảm sau mỗi dao động, giống như biên độ dao động của hệ vật-lò xo giảm theo thời gian.

Đối với các giá trị  $R$  lớn, các dao động suy giảm nhanh hơn; trên thực tế có tồn tại một giá trị điện trở tới hạn  $R_C = \sqrt{4L/C}$  mà trên giá trị đó thì không xảy ra dao động. Một hệ có  $R = R_C$  thì được nói là *tắt dần tới hạn*. Khi  $R$  vượt quá  $R_C$ , hệ được nói là *quá tắt dần*.

## Tóm tắt chương 32

### Các khái niệm và nguyên lý

Khi dòng điện trong một vòng dây thay đổi theo thời gian, một suất điện động được sinh ra trong vòng dây theo định luật Faraday.

**Suất điện động tự cảm** là:

$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt} \quad (32.1)$$

trong đó  $L$  là độ tự cảm của cuộn dây.

Độ tự cảm là độ đo mức độ mà cuộn dây chống lại sự thay đổi của dòng điện trong cuộn dây. Độ tự cảm có đơn vị trong hệ SI là Henry (H), trong đó:  $1\text{H}=1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$

**Độ tự cảm** của cuộn dây bất kì là:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} \quad (32.2)$$

Trong đó  $N$  là tổng số vòng của cuộn dây,  $\phi_B$  là từ thông qua cuộn dây. Độ tự cảm của một thiết bị phụ thuộc hình dạng của nó. Ví dụ, độ tự cảm của một ống dây solenoid bên trong chứa không khí là:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A \quad (32.4)$$

Trong đó  $l$  là chiều dài và  $A$  là tiết diện của ống dây.

Nếu một điện trở và một cuộn cảm được nối tiếp với một nguồn điện có suất điện động  $\mathcal{E}$  tại thời điểm  $t=0$  thì dòng điện trong mạch thay đổi theo thời gian theo biểu thức:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (32.7)$$

Trong đó  $\tau$  là **hằng số thời gian** của mạch RL. Nếu ta thay nguồn điện trong mạch bằng một dây dẫn không có điện trở thì dòng điện suy giảm theo hàm mũ  $e$  theo thời gian theo biểu thức:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \quad (32.10)$$

Trong đó  $\mathcal{E}/R$  là dòng điện ban đầu trong mạch điện.

**Năng lượng tích trữ trong từ trường** của cuộn cảm mang dòng điện  $i$  là:

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 \quad (32.12)$$

Năng lượng này là năng lượng từ trường tương ứng với năng lượng tích trữ trong điện trường của tụ điện đã được tích điện.

**Mật độ năng lượng** tại một điểm có từ trường B là:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (32.14)$$

**Hệ số hỗ cảm** của hệ gồm hai cuộn dây là:

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2} = M \quad (32.15)$$

Hệ số hỗ cảm này cho phép liên hệ suất điện động cảm ứng trong một cuộn dây với sự thay đổi dòng điện nguồn trong cuộn dây bên cạnh dùng các mối liên hệ:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad \text{và} \quad \mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (32.16, 32.17)$$

Trong một mạch LC có điện trở bằng không và không bức xạ điện từ (một trường hợp lý tưởng), các giá trị điện tích trên tụ điện và dòng điện trong mạch biến đổi hình sin theo thời gian theo một tần số góc được cho bởi:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.22)$$

Năng lượng trong mạch LC chuyển hóa liên tục giữa năng lượng tích trữ trong tụ điện và năng lượng tích trữ trong từ trường.

Trong một mạch RLC có điện trở nhỏ, điện tích trên tụ điện thay đổi theo thời gian theo công thức:

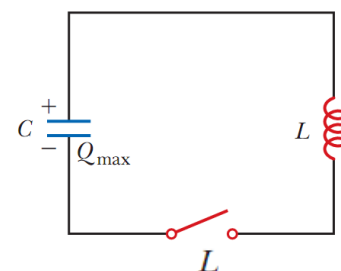
$$q = Q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t \quad (32.31)$$

Trong đó:

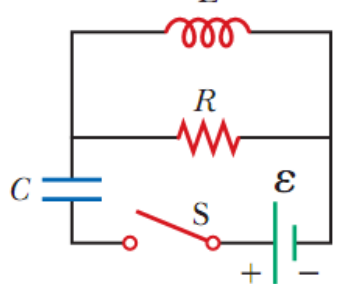
$$\omega_d = \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (32.32)$$

## Câu hỏi lý thuyết chương 32

1. Các thông số nào ảnh hưởng đến độ tự cảm của một cuộn dây? Độ tự cảm của một cuộn dây có phụ thuộc vào dòng điện chạy trong cuộn dây đó không?
2. Một cuộn cảm không có điện trở lúc đầu mang dòng điện ổn định. Sau đó dòng điện được tăng lên gấp đôi và giữ ổn định. Hỏi điều gì xảy ra với suất điện động trong cuộn cảm? (a) Tăng 4 lần. (b) tăng 2 lần. (c) giữ nguyên không đổi. (d) bằng 0. (e) giảm so với trước đó.
3. Giả sử dòng điện trong mạch gồm có nguồn điện, điện trở và cuộn cảm đã đạt giá trị cực đại và ổn định. (a) Cuộn cảm có độ tự cảm không? (b) Cuộn cảm có ảnh hưởng đến giá trị của dòng điện không?
4. Xét mạch điện LC như hình vẽ. Sau khi đóng khoá S, có những thời điểm điện tích trên tụ điện bằng 0 và cũng có những thời điểm điện tích trên tụ điện khác không. Hãy giải thích tại sao lại như vậy?



5. Xét mạch điện như hình vẽ. Lúc đầu khoá S mở, tụ điện chưa được tích điện và trong mạch không có dòng điện. Tại thời điểm  $t = 0$  khoá S được đóng. Hãy xác định các dòng điện chạy qua cuộn cảm, tụ điện, điện trở; suất điện động của cuộn cảm; hiệu điện thế của tụ điện và điện trở (a) ngay sau khi khoá S được đóng (b) rất lâu sau khi khoá S được đóng.



## Bài tập chương 32

1. Một cuộn dây có độ tự cảm 3,0 mH, dòng điện trong cuộn dây thay đổi từ 0,2 A đến 1,5 A trong khoảng thời gian 0,2 s. Hãy tìm độ lớn của suất điện động cảm ứng trung bình trong cuộn dây trong khoảng thời gian này.  
ĐS: 19,5 mV
2. Một cuộn cảm có độ tự cảm 2,0 H mang dòng điện 0,5 A. Khi khoá trong mạch được mở, dòng điện giảm về 0 sau 10,0 ms. Hỏi suất điện động cảm ứng trung bình trong cuộn cảm trong khoảng thời gian này?  
ĐS: 100 V
3. Một ống dây solenoid có bán kính 2,5 cm, dài 20,0 cm, gồm 400 vòng. Hãy tìm (a) độ tự cảm của solenoid (b) tốc độ biến thiên của dòng điện trong solenoid để sinh ra một suất điện động bằng 75,0 mV.  
ĐS: 1,97 mH; 38 mA/s.
4. Một cuộn cảm có độ tự cảm 90,0 mH mang dòng điện đang biến thiên theo thời gian theo công thức  $i = 1,0t^2 - 6,0t$  trong đó  $i$  tính theo A và  $t$  tính theo giây. Hãy tìm độ lớn



của suất điện động cảm ứng tại (a)  $t = 1,0$  s và (b)  $t = 4,0$  s. (c) Tại thời điểm nào thì suất điện động bằng 0?

ĐS: 360 mV; 180 mV; 3,0 s.

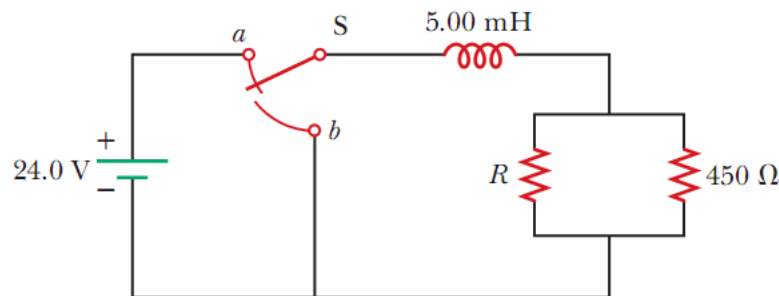
5. Một ắc quy 12,0 V được mắc vào mạch điện gồm điện trở  $10,0 \Omega$  nối tiếp với cuộn cảm 2,0 H. Hỏi sau bao lâu thì dòng điện trong mạch đạt tới (a) 50,0 % và (b) 90,0 % giá trị cuối cùng của nó?

ĐS: 0,139 s; 0,461 s.

6. Một mạch RL trong đó cuộn cảm có độ tự cảm  $L = 3,0$  H và một mạch RC trong đó tụ điện có điện dung  $C = 3,0 \mu\text{F}$ . Hai mạch này có hằng số thời gian bằng nhau. Nếu điện trở của 2 mạch này bằng nhau. (a) Hãy tính giá trị của điện trở và (b) hằng số thời gian của mạch điện.

ĐS:  $1000 \Omega$ ; 3 ms.

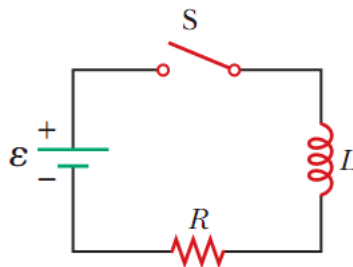
7. Xét mạch điện như hình vẽ dưới. (a) Khi khoá ở vị trí a điện trở phải có giá trị bằng bao nhiêu để mạch có hằng số thời gian là  $15,0 \mu\text{s}$ . (b) Hỏi dòng điện trong cuộn cảm tại thời điểm khoá được chuyển sang vị trí b?



Hình bài tập 7.

ĐS:  $1290 \Omega$ ; 72 mA

8. Xét mạch điện như hình vẽ dưới. Cho  $L = 7,0$  H,  $R = 9,0 \Omega$  và  $\mathcal{E} = 120,0$  V. Hỏi suất điện động tự cảm trong mạch sau 0,2 s kể từ khi đóng khoá S?



Hình bài tập 8 và bài tập 9.

9. Xét mạch điện như hình vẽ trên. Cho  $L = 8,0$  mH,  $R = 4,0 \Omega$  và  $\mathcal{E} = 6,0$  V. (a) Hỏi hằng số thời gian của mạch? (b) Hãy tính dòng điện sau  $250 \mu\text{s}$  kể từ khi đóng khoá S.

(c) Hãy tính giá trị dòng điện trong cực đại mạch khi ổn định. (d) Sau bao lâu thì dòng điện trong mạch đạt 80% giá trị cực đại của nó?

ĐS: 2 ms; 0,176 A; 1,5 A; 3,22 ms.

10. Hãy tính năng lượng từ trường của một ống dây solenoid 200 vòng mang dòng điện 1,75 A và từ thông qua mỗi vòng dây là  $3,7 \times 10^{-4} \text{T.m}^2$ .

ĐS: 64,8 mJ.

11. Một ắc quy 24,0 V được mắc nối tiếp với một điện trở và một cuộn cảm. Biết  $R = 8 \Omega$ ,  $L = 4,0 \text{ H}$ . Hãy tìm năng lượng từ trường tích trữ trong cuộn cảm (a) khi dòng điện đạt giá trị cực đại và (b) tại thời điểm bằng một hằng số thời gian của mạch kể từ khi đóng mạch ( $t = \tau$ ).

ĐS: 18 J; 7,19 J.

12. Từ trường bên trong một solenoid siêu dẫn là 4,5 T. Solenoid này có chiều dài 26,0 cm và đường kính trong là 6,2 cm. Hãy xác định (a) mật độ năng lượng từ trường và (b) năng lượng từ trường bên trong solenoid.

ĐS: 8,06 MJ; 6,32 kJ.

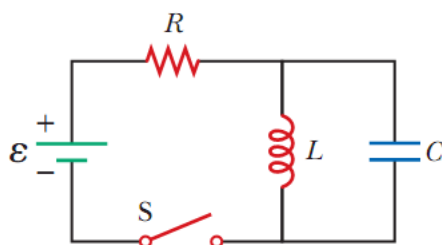
13. Một suất điện động bằng 96,0 mV được sinh ra bên trong một cuộn dây khi dòng điện trong cuộn dây bên cạnh đang tăng với tốc độ 1,2 A/s. Hỏi hệ số hồ cảm của 2 cuộn dây này?

ĐS: 80 mH.

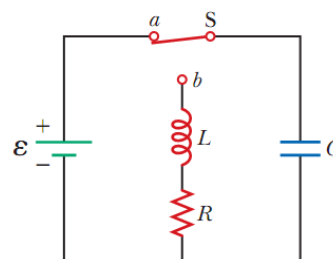
14. Hai cuộn dây đặt gần nhau. Cuộn thứ nhất mang dòng điện phụ thuộc thời gian theo công thức  $i(t) = 5,0e^{-0,025t} \sin 120\pi t$ , trong đó  $i$  tính bằng Ampe và  $t$  tính bằng giây. Tại thời điểm  $t = 0,80 \text{ s}$ , suất điện động đo được ở cuộn dây thứ hai là -3,2 V. Hỏi hệ số hồ cảm của các cuộn dây này bằng bao nhiêu?

ĐS: 1,73 mH.

15. Cho mạch điện như hình vẽ. Suất điện động của ắc quy là 50,0 V, điện trở là  $250,0 \Omega$  và điện dung là  $0,50 \mu\text{F}$ . Khoá S được đóng trong một khoảng thời gian dài, và hiệu điện thế của tụ điện bằng 0. Sau khi khoá S được mở, hiệu điện thế của tụ điện tăng tới giá trị cực đại 150,0 V. Hãy tìm độ tự cảm của cuộn dây.



Hình bài tập 15.

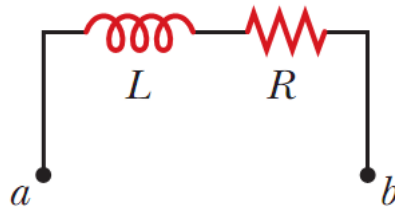


Hình bài tập 16.

16. Xét mạch điện như hình vẽ. Cho  $R = 7,6 \Omega$ ,  $L = 2,2 \text{ mH}$ ,  $C = 1,8 \mu\text{F}$ . (a) Hãy tính tần số dao động tắt dần của mạch khi khoá S được chuyển sang vị trí b. (b) Hãy tìm giá trị điện trở tối hạn đối với dao động tắt dần.

ĐS: 2510 Hz;  $69,9 \Omega$ .

17. Cho mạch điện như hình vẽ. Khi dòng điện trong phần mạch điện có giá trị 2,0 A và đang tăng với tốc độ 0,5 A/s thì điện áp đo được là  $\Delta V_{ab} = 9,0 \text{ V}$ . Khi dòng điện trong phần mạch điện có giá trị 2,0 A và đang giảm với tốc độ 0,5 A/s thì điện áp đo được là  $\Delta V_{ab} = 5,0 \text{ V}$ . Hãy tính các giá trị của (a) L và (b) R.

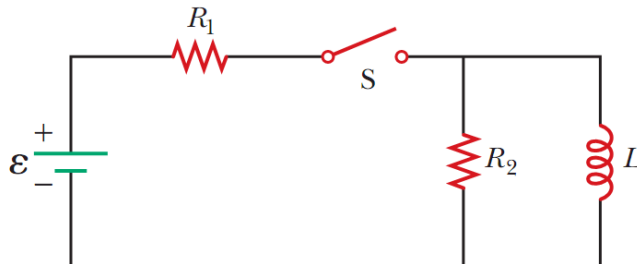


Hình bài tập 17.

ĐS: 4 H;  $3,5 \Omega$ .

18. Cho mạch điện như hình vẽ. Tại thời điểm  $t = 0$  khoá S được đóng. Ta cần tìm một công thức mô tả dòng điện trong cuộn cảm tại các thời điểm  $t > 0$ . Gọi dòng điện này là  $i$  và trên hình vẽ nó chạy theo chiều từ trên xuống dưới. Gọi  $i_1$  là dòng điện chạy từ trái sang phải qua  $R_1$ ,  $i_2$  là dòng điện chạy từ trên xuống qua  $R_2$ . (a) Hãy sử dụng quy tắc nút của Kirchoff để tìm mối liên hệ giữa 3 dòng điện này. (b) Hãy viết biểu thức quy tắc vòng của Kirchoff cho vòng mạch bên trái. (c) Hãy viết biểu thức quy tắc vòng của Kirchoff cho vòng mạch ngoài. (d) hãy khử  $i_1$  và  $i_2$  từ 3 phương trình này để thu được biểu thức chỉ chứa dòng điện  $i$ . (e) So sánh phương trình thu được ở phần (d) với phương trình 32.6 trong phần lý thuyết. Từ sự so sánh này hãy viết lại phương trình 32.7 đối với tình huống trong bài tập này và chứng tỏ rằng:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} (1 - e^{-Rt/L}) \text{ trong đó } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$



Hình bài tập 18.