PHẦN GIẢI BÀI TẬP

(180 phút không kể thời gian phát đề)

Câu 1

Một khối khí lý tưởng gồm N nguyên tử nằm trong thể tích V, ở trạng thái cân bằng nhiệt ứng với nhiệt độ T_1, hoàn toàn cô lập với môi trường bên ngoài. Giả sử tại thời điểm t=0 tất cả các nguyên tử có động năng $\frac{1}{2}mv^2 > \varepsilon kT_1$ (m là khối lượng của nguyên tử, k là hằng số Boltzmann, ε > 0 là hằng số) thoát ra ngoài thể tích V. Sau đó, số nguyên tử còn lại sẽ dần trở về trạng thái cân bằng nhiệt ứng với nhiệt độ T_2.

a. Hãy xác định nhiệt độ T_2 như là hàm của ε.

b. Tìm biểu thức của T_2 ở giới hạn ε >> 1 và ε << 1.

Gợi ý:

- Xác xuất hệ có năng lượng E khi ở trạng thái cân bằng nhiệt với nhiệt độ T là $W = Ae^{-\frac{E}{kT}}$, trong đó A là hệ số chuẩn hóa.
- $$\int_0^\infty dx\, x^{n+\frac{1}{2}} e^{-x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}(2n+1)!!$$

Bài giải

a. Ký hiệu N_1 và N_2 lần lượt là số nguyên tử trong khối khí lúc ban đầu và lúc cuối ở thể tích V, E_1 và E_2 là năng lượng tương ứng của khối khí. Ta có

$$E_1 = \frac{3}{2}N_1kT_1 \quad , \qquad E_2 = \frac{3}{2}N_2kT_2 \quad .$$

Suy ra

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{N_1}{N_2}\frac{E_2}{E_1} \quad .$$

Mặt khác, ta có

$$E_1 = \frac{\int_0^\infty dv \frac{1}{2}mv^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}}{\int_0^\infty dv\, v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}} \quad , \qquad E_2 = \frac{\int_0^{v_0} dv \frac{1}{2}mv^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}}{\int_0^\infty dv\, v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}} \quad ,$$

$$N_1 = N, \qquad N_2 = N\frac{\int_0^{v_0} dv\, v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}}{\int_0^{\infty} dv\, v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}} \quad .$$

Do đó,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\int_0^{\infty} dv\, v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}}{\int_0^{v_0} dv\, v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}} \; \frac{\int_0^{v_0} dv\, v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}}{\int_0^{\infty} dv\, v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}}}$$

hay

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\int_0^{\infty} dx\, x^{1/2} e^{-x}}{\int_0^{x_0} dx\, x^{1/2} e^{-x}} \; \frac{\int_0^{x_0} dx\, x^{3/2} e^{-x}}{\int_0^{\infty} dx\, x^{3/2} e^{-x}}$$

với $x_0 = \frac{mv_0^2}{2kT_1}$, $v_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon\, kT_1}{m}} \Rightarrow x_0 = \varepsilon$. Cuối cùng, ta nhận dược

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1 \frac{\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{3/2} e^{-x}}{\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{1/2} e^{-x}} \quad .$$

b. Nếu ε << 1, ta có thể lấy $e^{-x} \approx 1$. Khi đó

$$T_2 = \frac{2}{5} \varepsilon T_1 \quad .$$

Nếu ε >> 1, ta có

$$\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{1/2} e^{-x} = \frac{2}{3} x^{3/2} e^{-x} \Big|_0^{\varepsilon} + \frac{2}{3}\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{3/2} e^{-x} = \frac{2}{3}\varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon} + \frac{2}{3}\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{3/2} e^{-x} \quad .$$

Do đó

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1 \frac{\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{3/2} e^{-x}}{\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{1/2} e^{-x}} = T_1 \frac{\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{3/2} e^{-x}}{\varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon} + \int_0^{\varepsilon} dx\, x^{3/2} e^{-x}}$$

$$= T_1\left[1-\frac{\varepsilon^{3/2}e^{-\varepsilon}}{\int_0^{\varepsilon} dx\, x^{3/2}e^{-x}}\right] \approx T_1\left[1-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\varepsilon^{3/2}e^{-\varepsilon}\right] .$$

Trong tích phân cuối cùng, ta đã thay cận trên $\varepsilon \to \infty$.

Câu 2

Giả sử miền không gian $x > 0$ bị lấp đầy bởi vật liệu có chiết suất $n(x)$ thay đổi theo tọa độ x. Một tia sáng truyền theo phương lập góc α_0 so với trục x đi vào môi trường nói trên.

a. Chứng minh rằng bán kính R của quỹ đạo tia sáng tại điểm $x > 0$ thỏa mãn hệ thức

$$R\ d\alpha = \frac{dx}{\cos\alpha},$$

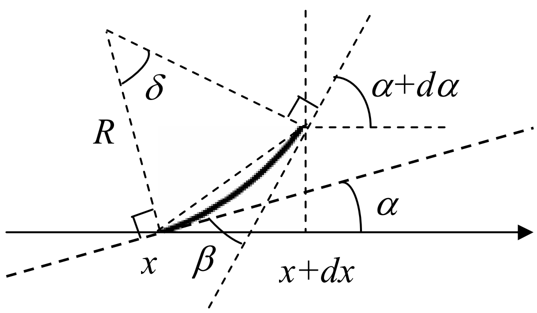
trong đó α là góc giữa phương truyền của tia sáng tại điểm x với trục x.

b. Hãy tìm biểu thức xác định bán kính quỹ đạo của tia sáng như là hàm của x bên trong môi trường.

c. Chiết suất $n(x)$ phụ thuộc vào x như thế nào để phần quỹ đạo cong của tia sáng trong miền $x > 0$ có dạng tròn? Trong trường hợp này, tia sáng đi vào môi trường đến độ sâu bao nhiêu? Hãy phác họa đường đi của tia sáng.

Bài giải

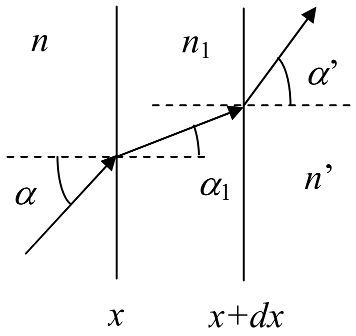
a.



Xét quỹ đạo của tia sáng trong khoảng $(x,x+dx)$. Với dx rất nhỏ, có thể xem đoạn quỹ đạo này có dạng tròn và độ dài cung tròn này gần bằng độ dài dây cung tương ứng (xem hình vẽ). Góc giữa trục x với tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm x là α, tại điểm $x+dx$ là $\alpha+d\alpha$. Dễ dàng thấy $\delta = \beta = d\alpha$. Ta có

$$R\delta = Rd\alpha = \frac{dx}{\cos\alpha} \quad .$$

b. Xét một lớp mỏng độ dày dx có bề mặt vuông góc với trục x. Có thể xem lớp vật liệu này là đồng nhất có chiết suất n_1 .



Tia sáng đi tới lớp mỏng dưới góc tới α và đi ra dưới góc α'. Ta có

$$n = n(x) \quad , \qquad n' = n(x+dx) \quad , \qquad \alpha' = \alpha + d\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n} \qquad , \qquad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha'} = \frac{n'}{n_1} \quad . \tag{1}$$

Do đó,

$$n\sin\alpha = n'\sin\alpha' \qquad \text{hay} \qquad n\cos\alpha\, d\alpha = -\sin\alpha\frac{dn}{dx}dx \quad . \tag{2}$$

Mặt khác, bán kính quỹ đạo R tại x thỏa mãn hệ thức

$$R\, d\alpha = \frac{dx}{\cos\alpha} \quad . \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}\sin\alpha = -n_0\sin\alpha_0\,\frac{1}{n^2}\frac{dn}{dx} = n_0\sin\alpha_0\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n(x)}\right). \tag{4}$$

Ở đây, n_0 và α_0 là chiết suất và góc tới của tia sáng tại bề mặt $x = 0$.

c. Quỹ đạo của tia sáng trong môi trường có dạng tròn nếu $1/R = const$. Khi đó

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n(x)}\right) = K \quad \text{hay} \quad \frac{1}{n(x)} = Kx + A \tag{5}$$

với K và A là các hằng số, K có thứ nguyên (1/độ dài). Vậy

$$n(x) = \frac{n_0}{Kn_0x + 1} \quad . \tag{6}$$

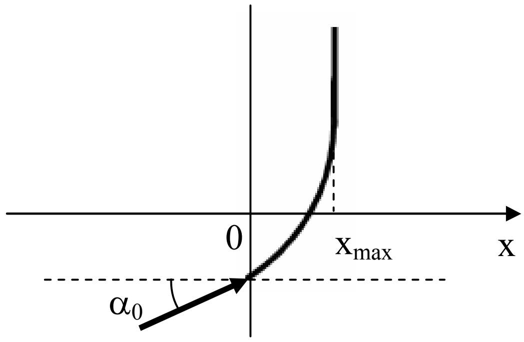
Nếu K > 0, khi x tăng thì n(x) giảm. Theo (2) ta có $n\sin\alpha = const$, suy ra sin(α) tăng. Do đó, tại khoảng cách lớn nhất x_{max} mà tia sáng đi vào môi trường thì $\alpha = 90^0$. Chiết suất tại điểm này có giá trị $n = n_0\sin\alpha_0$. Thay vào (6), ta có

$$n_0\sin\alpha_0 = \frac{n_0}{Kn_0x_{\max} + 1} \quad , \tag{7}$$

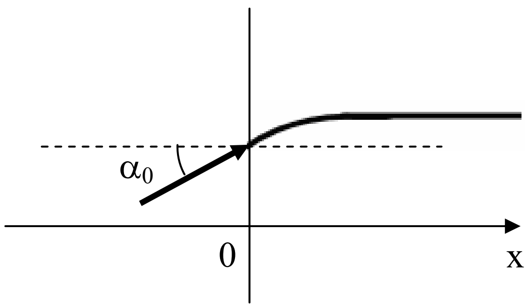
suy ra

$$x_{\max} = \frac{1}{Kn_0}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0} - 1\right) \quad . \tag{8}$$

Khi đó đường đi của tia sáng có dạng



Nếu K < 0, n(x) tăng khi x tăng, do đó sin(α) giảm. Giá trị nhỏ nhất của α là 0. Khi đó tia sáng truyền song song với trục x và không bị khúc xạ. Trong trường hợp này tia sáng đi vào môi trường ra xa vô cùng. Đường đi của tia sáng có dạng



Câu 3

Photon có động lượng $\vec{p}_1$ va chạm với electron đứng yên ($\vec{p}_2 = 0$). Khi đó, có thể xảy ra hai quá trình:

a. Photon bị tán xạ, bay ra với động lượng $\vec{p}_1^{'}$ theo phương lập góc ϑ với phương của $\vec{p}_1$, còn electron thì chuyển động với động lượng $\vec{p}_2^{'}$ theo phương lập góc φ với $\vec{p}_1$. Hãy biểu diễn $|\vec{p}_1^{'}|$, $|\vec{p}_2^{'}|$ và φ qua $|\vec{p}_1|$ và ϑ.

b. Photon bị hủy và sinh ra một cặp electron + positron. Như vậy, sau quá trình va chạm, có ba hạt tự do có cùng khối lượng nghỉ m. Hãy xác định năng lượng tối thiểu của photon để quá trình này có thể xảy ra.

Bài giải

a. Định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng cho các phương trình

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{'} + \vec{p}_2^{'} \quad , \qquad (1)$$

$$cp_1 + mc^2 = cp_1^{'} + c\sqrt{(p_2^{'})^2 + (mc)^2} \quad , \qquad (2)$$

hay

$$p_1 = p_1^{'}\cos\vartheta + p_2^{'}\cos\varphi \quad ,$$

$$p_1^{'} \sin\vartheta = p_2^{'} \sin\varphi \quad ,$$

$$\left(p_1 + mc - p_1^{'}\right)^2 = (p_2^{'})^2 + (mc)^2 \quad .$$

Từ đó ta nhận được

$$p_1^{'} = p_1\, mc\, [mc + p_1(1-\cos\vartheta)]^{-1} \quad , \qquad (3)$$

$$\tan\varphi = p_1^{'} \sin\vartheta / [p_1 - p_1^{'} \cos\vartheta] \quad , \qquad (4)$$

$$p_2^{'} = [p_1 - p_1^{'} \cos\vartheta] / \cos\varphi \quad . \qquad (5)$$

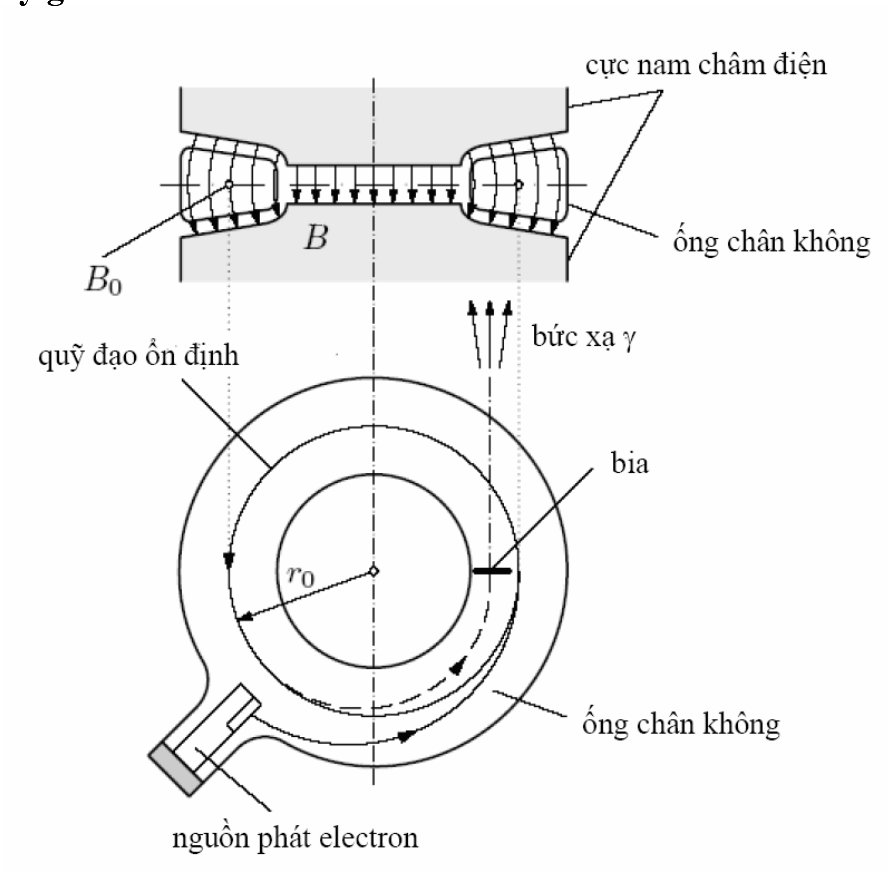
b. Năng lượng cực tiểu của hệ ba hạt sau va chạm được xác định trong hệ quy chiếu khối tâm S'. Năng lượng đó là $E_{min} = 3mc^2$. Khi đó, cả ba hạt đều đứng yên trong hệ quy chiếu S'. Trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm S, ba hạt có cùng xung lượng $p = p_1/3$. Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$cp_1 + mc^2 = 3[(p_1c/3)^2 + (mc^2)^2]^{1/2} \quad . \qquad (6)$$

Do đó, năng lượng tối thiểu của photon E_{ph} là

$$E_{ph} = cp_1 = 4\, mc^2 \quad . \qquad (7)$$

Câu 4 Máy gia tốc betatron



Betatron là một loại máy gia tốc tròn dùng để gia tốc electron, có thể cho các chùm electron năng lượng cao lên tới 300 MeV (rất lớn so với năng lượng nghỉ của electron m_ec^2 = 0,51 MeV). Trên hình vẽ là sơ đồ máy gia tốc betatron. Từ trường của nam châm điện tăng lên có tác dụng làm tăng tốc độ của electron đồng thời giữ cho electron chuyển động theo quỹ đạo tròn bán kính r_0. Đó là nguyên tắc làm việc của betatron.

Từ trường của nam châm điện không đồng nhất và có đối xứng trục. Trục đối xứng của từ trường đi qua tâm và vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo tròn của electron. Trên mặt phẳng này (được chọn là mặt z=0), từ trường không có thành phần hướng tâm, tức là $\vec{B}(r, z=0) = B(r)\vec{z}$, trong đó $\vec{z}$ là véc tơ đơn vị hướng theo trục z, r là khoảng cách đến trục đối xứng. Giả sử tại thời điểm ban đầu t = 0, electron đứng yên và từ trường bằng 0.

a. Tìm mối quan hệ giữa động lượng p của electron và bán kính quỹ đạo r_0.

b. Chứng minh rằng để giữ cho electron chuyển động theo quỹ đạo tròn có bán kính r_0 không đổi mà vẫn được gia tốc, cần thỏa mãn điều kiện

$$B(r_0, t) = \frac{1}{2}\overline{B}(t) \quad ,$$

trong đó $B(r_0) \equiv B_0$ là giá trị từ trường trên quỹ đạo tròn, $\overline{B}$ là giá trị trung bình của từ trường xét trên toàn bộ diện tích S giới hạn bởi quỹ đạo đó,

$$\overline{B} = \frac{1}{S}\oint_S B(r)\, dS \quad .$$

Điều kiện này được gọi là điều kiện Wideroe hay điều kiện betatron.

Bài giải

a. Để giữ electron chuyển động theo quỹ đạo tròn bán kính r_0 không đổi, lực từ tác dụng lên electron phải cân bằng với lực ly tâm:

$$|evB(r_0, t)| = m_e\gamma \frac{v^2}{r_0} \quad , \tag{1}$$

trong đó v và m_e lần lượt là tốc độ và khối lượng nghỉ của electron,

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad .$$

Do đó, động lượng của electron liên hệ với bán kính quỹ đạo bởi biểu thức

$$p(t) = \gamma m_e v = |er_0 B(r_0, t)| \quad . \tag{2}$$

Rõ ràng là khi p tăng, từ trường B cũng phải tăng để bán kính quỹ đạo r_0 không thay đổi.

b. Khi từ trường thay đổi, trên quỹ đạo của electron có suất điện động cảm ứng U

$$|U| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \left|\oint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}\right| = \left|\oint_S \frac{dB(r)}{dt} dS\right| = \pi\, r_0^2 \left|\frac{d\overline{B}(t)}{dt}\right| \ . \tag{3}$$

Mặt khác, ký hiệu $\vec{E}$ là điện trường xoáy tạo bởi từ trường biến thiên, ta có

$$|U| = \left|\oint_C \vec{E} d\vec{s}\right| = 2\pi\, r_0 E(r_0, t) \quad . \tag{4}$$

Ở đây, C ký hiệu quỹ đạo của electron. Do đối xứng, điện trường $\vec{E}$ có phương tiếp tuyến với quỹ đạo của electron. So sánh (3) và (4) ta nhận được

$$E(r_0, t) = \frac{1}{2} r_0 \left|\frac{d\overline{B}(t)}{dt}\right| \quad . \tag{5}$$

Phương trình chuyển động của electron là

$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = |eE(r_0, t)| \quad . \tag{6}$$

Từ các phương trình (2), (5) và (6), ta có

$$\left|\frac{dB(r_0, t)}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{d\overline{B}(t)}{dt}\right| \qquad \text{hay} \qquad B(r_0, t) = \frac{1}{2}\overline{B}(t) \quad . \tag{7}$$