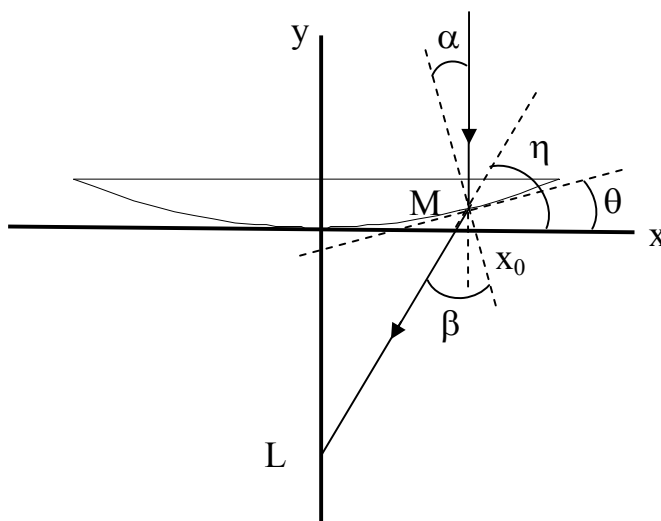


## PHẦN BÀI TẬP

### Câu 1

Một thấu kính lồi làm từ vật liệu có chiết suất  $n > 1$ , một mặt là mặt phẳng, mặt kia được tạo bằng cách quay đường parabol  $y=kx^2$  quanh trục của nó (xem hình vẽ). Ký hiệu  $R$  là bán kính của đường viền mặt thấu kính phẳng. Giả sử độ dày của thấu kính rất nhỏ so với bán kính  $R$ , tức là  $kR^2 \ll R$ . Hãy tính tiêu cự của thấu kính.

### Bài giải



Theo giả thiết của đề bài, ta có

$$kR \ll 1 . \quad (1)$$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho trục  $x$  tiếp xúc với mặt cong của thấu kính tại đỉnh thấu kính, trục  $y$  đi qua đỉnh. Xét tia sáng đi tới thấu kính trong mặt phẳng  $xy$ , song song trục  $y$  và cách trục  $y$  khoảng  $x_0 < R$ . Điểm tới  $M$  của tia này tại mặt cong có tọa độ là  $(x_0, kx_0^2)$ . Tiếp tuyến với mặt cong tại  $M$  có hệ số góc

$$\tan \theta = y'(M) = 2kx_0 \ll 1 . \quad (2)$$

Ký hiệu góc giữa tia tới và pháp tuyến của mặt cong tại điểm  $M$  là  $\alpha$ , góc khúc xạ là  $\beta$ . Ta có

$$\alpha = \theta \quad , \quad \sin \beta = n \sin \alpha .$$

Góc lệch bởi tia khúc xạ và trục  $x$  là

$$\eta = \theta + \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) . \quad (3)$$

Hệ số góc của tia khúc xạ là

$$\tan \eta = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cot(\beta - \theta) = \frac{1 + \tan \beta \tan \theta}{\tan \beta - \tan \theta} . \quad (4)$$

Phương trình của tia khúc xạ là

$$\frac{y - kx_0^2}{x - x_0} = \frac{1 + \tan \beta \tan \theta}{\tan \beta - \tan \theta} . \quad (5)$$

Giao điểm của tia khúc xạ với trục y có tọa độ  $(0, L)$ . Thay vào phương trình trên, ta được

$$\frac{L - kx_0^2}{-x_0} = \frac{1 + \tan \beta \tan \theta}{\tan \beta - \tan \theta} , \quad (6)$$

hay

$$L = kx_0^2 - x_0 \frac{1 + \tan \beta \tan \theta}{\tan \beta - \tan \theta} = x_0 \left( \frac{1}{2} \tan \theta - \frac{1 + \tan \beta \tan \theta}{\tan \beta - \tan \theta} \right) . \quad (7)$$

Từ định luật khúc xạ rút ra

$$\tan \beta = \frac{n \tan \theta}{\sqrt{1 + (1 - n^2) \tan^2 \theta}} \approx n \tan \theta . \quad (8)$$

Ở đây ta đã bỏ qua số hạng nhỏ chứa  $\tan^2 \theta$ . Do đó

$$L = x_0 \left( \frac{1}{2} \tan \theta - \frac{1 + n \tan^2 \theta}{(n - 1) \tan \theta} \right) \approx -\frac{x_0}{(n - 1) \tan \theta} = -\frac{1}{2k(n - 1)} . \quad (9)$$

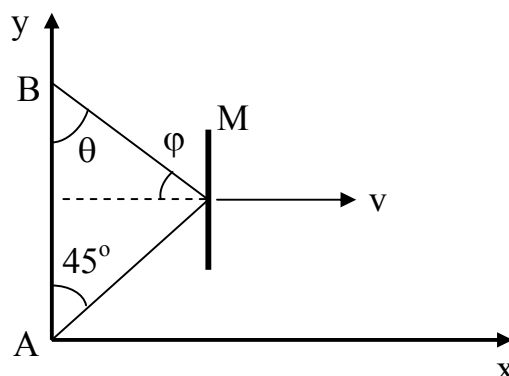
Vì L không phụ thuộc vào  $x_0$  nên chùm tia sáng song song với trục của thấu kính, sau khi đi qua thấu kính, sẽ hội tụ tại một điểm. Vậy tiêu cự của thấu kính là

$$f = \frac{1}{2k(n - 1)} . \quad (10)$$

## Câu 2

Một laser đặt tại điểm A phát ra ánh sáng bước sóng 500 nm theo hướng lập một góc  $\alpha = 45^\circ$  so với trục y trong mặt phẳng xy. Tia sáng đập vào gương phẳng M chuyển động với vận tốc  $v = c/5$  theo chiều trục x và bị phản xạ đến người quan sát B đứng yên trên trục y. Gương M luôn luôn vuông góc với trục x. Hỏi

- Góc  $\theta$  bằng bao nhiêu (xem hình vẽ)?
- Người B quan sát được ánh sáng có bước sóng bao nhiêu?



Gợi ý: Theo thuyết tương đối hẹp, khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác, các đại lượng  $\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$  biến đổi giống như các đại lượng  $(ct, \vec{r})$ , tức là

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad ,$$

trong đó  $\beta = \frac{v}{c}$  ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  . Ở đây, các trục tọa độ tương ứng của hai hệ quy chiếu thì song song với nhau và hệ quy chiếu S' chuyển động dọc theo trục x của hệ S với tốc độ v.

### Bài giải

#### Cách 1

Ký hiệu S là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm (đứng yên), S' là hệ quy chiếu riêng của gương (tức là gương đứng yên trong hệ S'). S' có các trục tọa độ song song với các trục tương ứng của hệ S và chuyển động với vận tốc v so với S. Xem ánh sáng gồm các photon có động lượng (trong hệ S)

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad , \quad p_x = p_y = p \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h}{\lambda} \quad . \quad (1)$$

Trong hệ S', động lượng của photon tới là

$$p'_x = \gamma \left( p_x - \frac{Ev}{c^2} \right) \quad , \quad p'_y = p_y = p \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \quad ,$$

$$p' = \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \gamma^2 (1 - \sqrt{2}\beta)^2} \quad . \quad (2)$$

Như vậy, trong hệ S', hướng truyền của ánh sáng lập góc  $\alpha'$  so với trục  $y' \equiv y$ :

$$\tan \alpha' = \frac{p'_x}{p'_y} = \gamma(1 - \sqrt{2}\beta) \quad . \quad (3)$$

Động lượng trong S' của photon phản xạ là  $(-p'_x, p'_y)$ .

Đối với người quan sát B, photon phản xạ có động lượng

$$p''_x = \gamma \left( -p'_x + \frac{p'_y v}{c} \right) \quad , \quad p''_y = p'_y \quad . \quad (4)$$

Do đó,

$$\tan \theta = \left| \frac{p''_x}{p''_y} \right| = \gamma \left( -\frac{p'_x}{p'_y} + \beta \frac{p'_y}{p'_y} \right) = \gamma \left\{ -\tan \alpha' + \beta \sqrt{1 + \tan^2 \alpha'} \right\}$$

$$= \gamma \left| -\gamma(1 - \sqrt{2}\beta) + \beta \sqrt{1 + \gamma^2 (1 - \sqrt{2}\beta)^2} \right| \quad . \quad (5)$$

a. Thay giá trị của  $\gamma$  và  $\beta$ , ta nhận được

$$\tan \theta = 0,4945 \quad \rightarrow \quad \theta = 26,3^\circ \quad .$$

b. Xét trong hệ S, động lượng của photon phản xạ là

$$p'' = \frac{p''_y}{\cos \theta} = \frac{p}{\sqrt{2} \cos \theta} . \quad (6)$$

Vậy B quan sát thấy ánh sáng có bước sóng

$$\lambda' = \frac{h}{p''} = \sqrt{2} \cos \theta \frac{h}{p} = \lambda \sqrt{2} \cos \theta = 634 \text{ nm} . \quad (7)$$

## Cách 2

Theo hiệu ứng Doppler, nếu nguồn sáng chuyển động dọc theo trục x của hệ quy chiếu phòng thí nghiệm với vận tốc v, phương truyền của ánh sáng lập góc  $\eta$  với trục x, f là tần số ánh sáng, thì góc  $\eta'$  giữa phương truyền với trục x' và tần số f' của ánh sáng xét trong hệ tọa độ riêng của nguồn sáng được cho bởi các biểu thức

$$\cos \eta' = \frac{\cos \eta - v/c}{1 - v/c \cos \eta} , \quad f' = f \gamma (1 - v/c \cos \eta) .$$

Gọi S là hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, S' là hệ quy chiếu riêng của gương. Ký hiệu  $\alpha_1$  là góc giữa hướng truyền của ánh sáng và trục x trong S thì góc  $\alpha'_1$  giữa hướng truyền và trục x' trong hệ S' được cho bởi

$$\cos \alpha'_1 = \frac{\cos \alpha_1 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_1} = \frac{\sin \alpha - \beta}{1 - \beta \sin \alpha} .$$

Tần số ánh sáng xét trong hệ S' là

$$f' = \gamma f (1 - \beta \cos \alpha_1) = \gamma f (1 - \beta \sin \alpha) .$$

Trong hệ S', góc tới ở gương là  $\varphi' = \alpha'_1$ ; góc phản xạ bằng góc tới  $\varphi'$ .

Đối với B, góc phản xạ là  $\varphi$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \varphi' - \beta}{1 - \beta \cos \varphi'} = \frac{\cos \alpha'_1 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha'_1} .$$

Ta có  $\theta = 90^\circ - \varphi$ .

Tần số người B ghi nhận được là f''

$$f'' = \gamma f' (1 - \beta \cos \varphi') = \gamma f' (1 - \beta \cos \alpha'_1) .$$

Thay giá trị số, ta nhận được  $\theta = 26,3^\circ$ ,  $\lambda'' = 634 \text{ nm}$ .

## Câu 3

Xét khối khí lý tưởng gồm N hạt khối lượng m chứa trong hình hộp lập phương thể tích V ( $V=L^3$ ). Khối khí nằm trong trường thế có cường độ  $\vec{G} = -b\vec{y}$  và ở trạng thái cân bằng với nhiệt độ T (b là hằng số,  $\vec{y}$  là véc tơ đơn vị hướng theo trục tọa độ y).

Giả sử trong trường  $\vec{G}$ , hạt có thế năng  $V(y)=mby$ , trong đó  $y$  là tọa độ của hạt  $(-L/2 < y < L/2)$ . Hãy

- tính năng lượng của hệ.
- tính nhiệt dung của hệ.
- tính áp suất trong khối khí.

Gợi ý: Khí lý tưởng ở trạng thái cân bằng với nhiệt độ  $T$  tuân theo phân bố Maxwell-Boltzmann

$$f(E) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{k_B T}},$$

trong đó  $E$  là năng lượng của hạt.

### Bài giải

a. Năng lượng của hệ:  $E = T + U$ , trong đó  $T$  là động năng tổng cộng,  $U$  là thế năng tổng cộng của hệ hạt. Ta có

$$T = N (3/2)k_B T \quad (1)$$

Ký hiệu  $N(y')dy'$  là số hạt có tọa độ  $y$  nằm trong khoảng  $(y', y'+dy')$ . Hàm  $N(y)$  là hàm phân bố Boltzmann

$$N(y) = A e^{-\frac{mby}{k_B T}}, \quad (2)$$

trong đó  $A$  là hằng số chuẩn hóa được xác định từ điều kiện

$$\int_{-L/2}^{L/2} N(y)dy = A \int_{-L/2}^{L/2} dy e^{-\frac{mby}{k_B T}} = N \quad (3)$$

Suy ra

$$A = \frac{Nmb}{2k_B T} \frac{1}{\sinh\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right)} \quad (4)$$

Thế năng tổng cộng của hệ là

$$U = \int_{-L/2}^{L/2} mby N(y) dy = Nk_B T \left\{ 1 - \frac{mbL}{2k_B T} \coth\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right) \right\} \quad (5)$$

Năng lượng của hệ là

$$E = \frac{5}{2} Nk_B T - \frac{NmbL}{2} \coth\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right) \quad (6)$$

b. Nhiệt dung của hệ

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5}{2} Nk_B - \frac{N(mbL)^2}{4k_B T^2} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right)}$$

$$= Nk_B \left\{ \frac{5}{2} - \left(\frac{mbL}{2k_B T}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right)} \right\} . \quad (7)$$

c. Từ phương trình trạng thái suy ra áp suất tại vị trí có tọa độ y là

$$P(y) = n(y)k_B T$$

$$= \frac{Nmb}{2L^2} \frac{1}{\sinh\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right)} e^{-\frac{mby}{k_B T}} , \quad (8)$$

trong đó  $n(y)$  là mật độ hạt tại điểm có tọa độ y.

*Cách khác:*

Xét lớp khí có tọa độ y trong khoảng  $(y, y+dy)$ . Nếu biểu diễn số hạt trong lớp khí này có thành phần vận tốc theo trục x nằm trong khoảng  $(v_x, v_x+dv_x)$  là  $N(v_x, y)dv_x L^2 dy$  thì

$$N(v_x, y)dv_x L^2 dy = C e^{-\left(\frac{1}{2}mv_x^2 + mby\right)/(k_B T)} dv_x L^2 dy$$

với C là hằng số chuẩn hóa,

$$C = \frac{1}{L^2} \frac{Nmb}{2k_B T} \left(\frac{m}{\pi 2k_B T}\right)^{1/2} \frac{1}{\sinh\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right)} .$$

Các hạt trong lớp khí này va chạm với thành hộp vuông góc với trục x. Biến thiên thành phần động lượng hướng theo trục x của khối khí này, xét trong thời gian dt, là

$$dP_x = \int_0^{\infty} dv_x (2mv_x) N(v_x, y) (Ldy) (v_x dt)$$

$$= dt(Ldy) C \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{3/2} .$$

Do đó áp suất tác dụng lên thành hộp là

$$P = \frac{1}{Ldy} \frac{dP_x}{dt} = \frac{Nmb}{2L^2} \frac{1}{\sinh\left(\frac{mbL}{2k_B T}\right)} e^{-\frac{mby}{k_B T}} .$$

**Chú ý:** Định nghĩa của hàm hipecolic

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad , \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad ,$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad .$$

#### Câu 4 Bẫy quang học

Người ta dùng các chùm laser giao thoa với nhau tạo thành bẫy quang học để bắt và giam giữ các nguyên tử siêu lạnh (nguyên tử có năng lượng chuyển động nhiệt rất thấp). Ở gần tâm bẫy, các chùm laser tạo ra điện trường có dạng

$$\vec{E}(x) = E_0 \left( 1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right) \vec{e}_z \quad ,$$

trong đó  $\vec{e}_z$  là véc tơ đơn vị hướng theo trục  $z$ ,  $x$  là khoảng cách đến tâm bẫy theo phương trục  $x$ . Giá trị đặc trưng của  $E_0$  và  $x_0$  là  $E_0 = 5000 \text{ V/m}$ ,  $x_0 = 5 \text{ }\mu\text{m}$ .

Một nguyên tử rubidi  $^{87}_{37}\text{Rb}$  chuyển động dọc theo trục  $x$  với tốc độ  $v = 0,1 \text{ mm/s}$ , đến vị trí  $x = 0$  thì bẫy quang học được bật để hoạt động. Xét mô hình nguyên tử rubidi gồm hạt nhân là điện tích điểm bao bọc bởi đám mây điện tích âm phân bố đều trong quả cầu bán kính  $R$  (bán kính nguyên tử rubidi). Tâm quả cầu điện tích âm trùng với hạt nhân nên mô men lưỡng cực điện của nguyên tử bằng 0. Giả thiết rằng khi nguyên tử nằm trong điện trường, đám mây điện tích âm không bị biến dạng nhưng hạt nhân và tâm đám mây điện tích âm bị dịch chuyển, dẫn đến nguyên tử có mô men lưỡng cực điện khác 0.

**a.** Hãy tính hệ số phân cực  $\alpha$  của nguyên tử ( $\alpha =$  mô men lưỡng cực điện / cường độ điện trường).

Hằng số điện môi của khí nguyên tử rubidi có mật độ nguyên tử  $N = 1,01 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  là  $\varepsilon = 1,00004$ . Hãy đánh giá bán kính  $R$  của nguyên tử rubidi.

**b.** Cho biết  $R = 2,5 \text{ \AA}$ . Với các giá trị đặc trưng của bẫy quang học, hãy mô tả định lượng chuyển động của nguyên tử rubidi nói trên sau khi bẫy bắt đầu hoạt động (xác định các thông số của chuyển động và những giả thiết đã sử dụng).

**c.** Xác định tốc độ cực đại  $v_{max}$  của nguyên tử rubidi để nó còn có thể bị bắt vào bẫy khi bẫy hoạt động.

Cho biết hằng số điện môi của chân không  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ , khối lượng của một nucleon  $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

*Một số khái niệm:* Véc tơ phân cực  $\vec{P}$  của khối khí là tổng mô men lưỡng cực điện của các nguyên tử trong một đơn vị thể tích. Véc tơ phân cực liên hệ với điện trường ngoài bởi biểu thức

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad ,$$

trong đó  $\chi$  gọi là độ cảm điện,  $\varepsilon_0$  là hằng số điện môi của chân không. Hằng số điện môi  $\varepsilon$  của khối khí được cho bởi biểu thức  $\varepsilon = 1 + \chi$ .

### Bài giải

a. Ký hiệu  $z_1$  và  $z_2$  lần lượt là độ dịch của hạt nhân và tâm quả cầu điện tích âm khi đặt trong điện trường của các chùm laser. Ký hiệu  $q$  là điện tích của hạt nhân. Công của điện trường thực hiện khi làm dịch chuyển hạt nhân và quả cầu điện tích âm là

$$A_1 = qE(x)z_1 + qE(x)z_2 = qE(x)d \quad , \quad (1)$$

trong đó  $d$  là khoảng cách giữa hạt nhân và tâm quả cầu điện tích âm,  $x$  là vị trí của nguyên tử trên trục  $x$ . Để nguyên tử không bị phá vỡ,  $d < R$ . Theo định luật bảo toàn năng lượng, công  $A_1$  bằng năng lượng tĩnh điện  $A_2$  của nguyên tử khi vị trí của hạt nhân lệch khỏi tâm quả cầu điện tích âm. Dễ dàng tính được thế tĩnh điện  $U(r)$  gây bởi điện tích âm tại điểm cách tâm quả cầu một khoảng  $r < R$

$$U(r) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r^2 \quad . \quad (2)$$

Do đó,

$$A_2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R^3} d^2 \quad . \quad (3)$$

Suy ra

$$d = \frac{8\pi\varepsilon_0 R^3}{q} E(x) \quad , \quad (4)$$

do đó mô men lưỡng cực điện của nguyên tử là

$$\vec{p} = 8\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}(x) \quad . \quad (5)$$

Hệ số phân cực của nguyên tử là

$$\alpha = 8\pi\varepsilon_0 R^3 \quad . \quad (6)$$

Nếu  $N$  là mật độ nguyên tử của khối khí thì véc tơ phân cực của khối khí là

$$\vec{P} = N \vec{p} = 8\pi\varepsilon_0 N R^3 \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad . \quad (7)$$

Theo định nghĩa, hằng số điện môi  $\varepsilon$  của khí nguyên tử liên hệ với độ cảm điện  $\chi$  theo công thức

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad . \quad (8)$$

Từ (7) và (8) rút ra



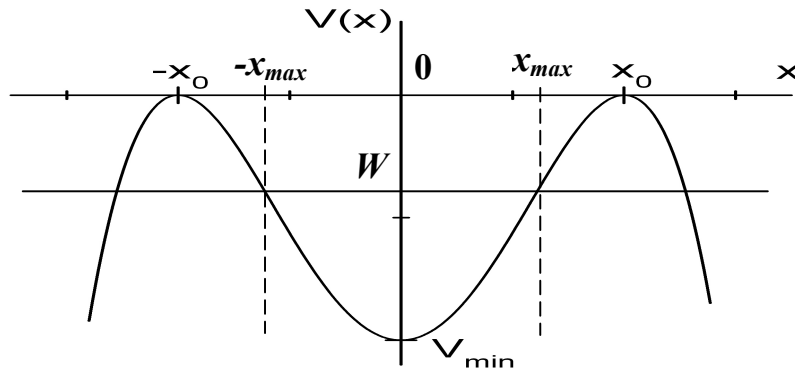
$$\varepsilon = 1 + 8\pi NR^3 \quad \text{hay} \quad R = \left( \frac{\varepsilon - 1}{8\pi N} \right)^{1/3} . \quad (9)$$

Thay giá trị số vào (9), ta nhận được  $R = 2,52 \times 10^{-8}$  cm.

**b.** Thế năng của nguyên tử tại điểm  $x$  trong điện trường của các chùm laser là

$$V(x) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(x) = -8\pi\varepsilon_0 R^3 E^2(x) = -8\pi\varepsilon_0 R^3 E_0^2 \left( 1 - 2\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{x^4}{x_0^4} \right) . \quad (10)$$

Đồ thị của  $V(x)$



Tại thời điểm bắt đầu hoạt động,  $t=0$ , nguyên tử ở vị trí  $x=0$ , năng lượng tổng cộng của nguyên tử là

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - 8\pi\varepsilon_0 R^3 E_0^2 \equiv \frac{1}{2}mv^2 + V_{\min} . \quad (11)$$

Vì  $v < 4E_0 \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 R^3}{m}} \approx 1,02$  cm/s nên  $W < 0$ . Tọa độ  $x$  lớn nhất của nguyên tử là  $x_{\max}$  thỏa mãn phương trình

$$W - V(x) = 0 . \quad (12)$$

Vì  $x_{\max} < x_0$  nên

$$x_{\max} = x_0 \sqrt{1 - \sqrt{1 + \frac{mv^2}{2V_{\min}}}} . \quad (13)$$

Thay các số liệu đã cho trong đầu bài, ta nhận được  $x_{\max} \cong 0,065 x_0$ , tức là

$$x_{\max} \ll x_0 . \quad (14)$$

Với giả thiết (11) và bất đẳng thức (14), ta có biểu thức gần đúng cho thế năng  $V(x)$  của nguyên tử rubidi đã cho

$$V(x) \approx -8\pi\epsilon_0 R^3 E_0^2 \left(1 - 2\frac{x^2}{x_0^2}\right) \quad . \quad (15)$$

Như vậy, nguyên tử chịu tác dụng của lực

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -kx \quad \text{với} \quad k = \frac{32\pi\epsilon_0 R^3 E_0^2}{x_0^2} \quad . \quad (16)$$

Dưới tác dụng của lực  $F(x)$ , nguyên tử thực hiện dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng  $x = 0$  với tần số

$$f = \frac{3E_0}{x_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0 R^3}{\pi m}} \approx 459 \text{ s}^{-1} \quad (17)$$

và biên độ

$$x_{\max} \approx x_0 \frac{v}{4RE_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi\epsilon_0 R}} = 0,035 \text{ } \mu\text{m} \quad . \quad (18)$$

**c.** Theo đồ thị của  $V(x)$ , để nguyên tử bị bắt và giam giữ trong bẫy, vận tốc ban đầu của nguyên tử phải thỏa mãn điều kiện

$$v < v_{\max} \quad \text{với} \quad v_{\max} = 4E_0 \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 R^3}{m}} = 1,02 \text{ cm/s} \quad . \quad (19)$$