

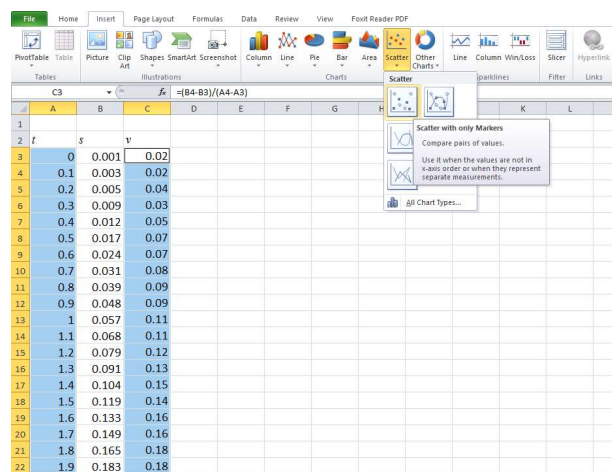
Khớp dữ liệu bằng hàm số giải tích

Đặt vấn đề: Trong nhiều trường hợp sau khi đo đạc dữ liệu thực nghiệm, chúng ta muốn tìm hiểu xem các đại lượng vật lý vừa thu được biến đổi theo quy luật nào. Lúc này ta có thể sử dụng phương pháp bán thực nghiệm, tìm cách so sánh dữ liệu của chúng ta với một hàm số được cho dưới dạng biểu thức, thường có dạng quen thuộc như đường thẳng, parabol, đa thức bậc cao, hàm mũ...

Ngoài một số phần mềm chuyên dụng giúp thực hiện các mục đích trên, ta cũng có thể dùng Microsoft Excel, một phương tiện khá phổ thông để xử lý dữ liệu.

I. VẼ ĐỒ THỊ

HÃY lấy một ví dụ điển hình, qua thí nghiệm khảo sát chuyển động thẳng của một vật, ta thu được dữ liệu sự phụ thuộc của vận tốc vào thời gian lưu vào bảng dữ liệu như hình 1.

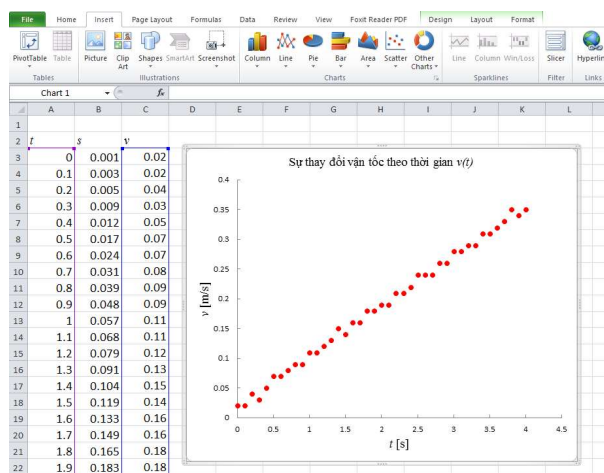


Hình 1: Dữ liệu thực nghiệm

Để có phản ánh trực quan, ta dựng đồ thị phụ thuộc $v(t)$ của vận tốc vào thời gian. Chỉ cần lựa chọn vùng dữ liệu của thời gian t và vận tốc v , sau đó vào Insert - Scatter - Scatter with Markers. Nhất định phải lựa chọn kiểu đồ thị có Marker vì chính các điểm này diễn tả trực tiếp các giá trị thực nghiệm. Đồ thị sẽ có dạng như hình 2.

II. DỰ ĐOÁN DẠNG HÀM

Mỗi đại lượng vật lý trong điều kiện nhất định sẽ biến đổi theo quy luật nào đó. Một mặt ta cần đưa ra nhận định tổng quan về quy luật biến đổi: tăng,



Hình 2: Đồ thị vừa dựng được từ dữ liệu

giảm hay gần như không đổi? Nếu tăng thì tăng đều đặn theo quy luật tuyến tính, tăng theo hàm lũy thừa, hay tăng theo hàm mũ? Sau khi đưa ra kết luận tổng quan, ta dùng hàm số có dạng biểu thức để so sánh và tính toán tiếp theo.

Từ đồ thị $v(t)$ ở hình 2, ta thấy rằng vật có xu hướng chuyển động thẳng biến đổi đều, cụ thể là nhanh dần đều, bởi vì vận tốc tăng lên một cách đều đặn theo thời gian. Nói cách khác, vật đang có xu hướng chuyển động với gia tốc không đổi. Theo lý thuyết, đồ thị $v(t)$ của vật chuyển động thẳng biến đổi đều phải có dạng một đường thẳng, với độ dốc bằng đúng giá trị của gia tốc:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Vì vậy ta sẽ dùng một đường thẳng có phương trình dạng:

$$y = ax + b$$

để so sánh với đồ thị thực nghiệm hình 2. Để thấy



rằng hệ số góc a chính là tốc độ biến đổi của vận tốc, hay gia tốc của chuyển động.

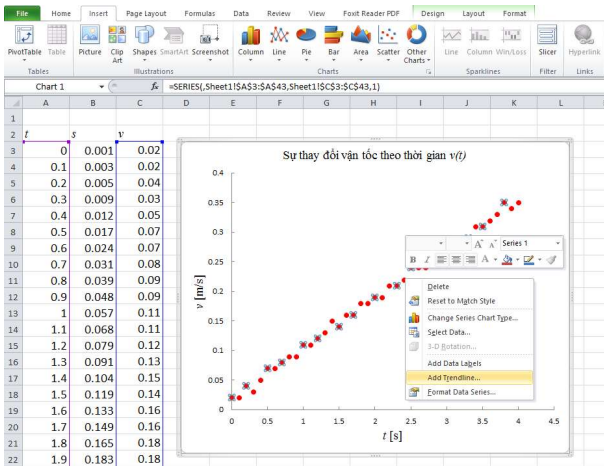
III. KHỚP HÀM

Sau khi đoán nhận quy luật biến thiên của dữ liệu, cụ thể trong ví dụ trên là quy luật tuyến tính $y = ax + b$, ta cần tính toán các tham số có mặt trong biểu thức hàm số.

Nếu tiến hành khớp hàm bằng tay, từ đồ thị trên giấy, ta vẽ một đường thẳng đi qua các điểm dữ liệu một cách trung bình nhất có thể. Sau đó hệ số góc a được tính qua công thức:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Còn ở đây ta khớp hàm bằng máy tính. Phần mềm sẽ tính toán các tham số a và b bằng phương pháp bình phương tối thiểu, rồi sau đó mới vẽ đường thẳng để khớp với đồ thị thực nghiệm. Chỉ cần nhấp chuột phải vào đồ thị cần khớp hàm, chọn Add Trendline như hình 3.



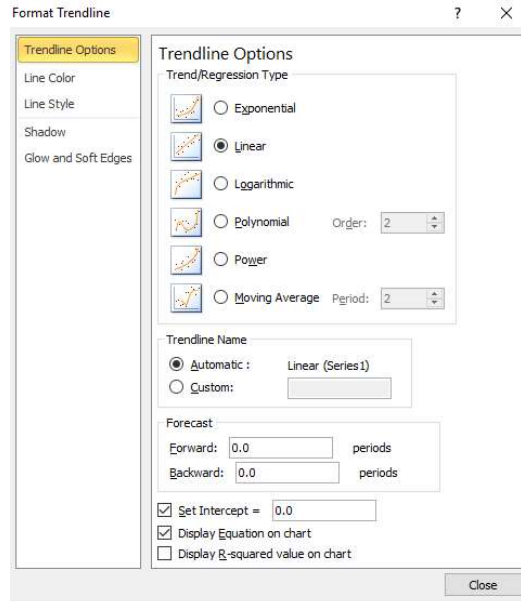
Hình 3: Chèn đường khớp dữ liệu

Trong mục Trendline Options miêu tả trên hình 4, ta chọn loại quy luật đã dự đoán. Có những lựa chọn sau đây:

- **Exponential:** hàm mũ dạng $y = ae^{bx}$
- **Lineal:** hàm tuyến tính dạng $y = ax + b$
- **Logarithmic:** hàm loga dạng $y = a \ln x + b$
- **Polynomial:** hàm đa thức dạng $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, với n - số bậc (order) của đa thức.

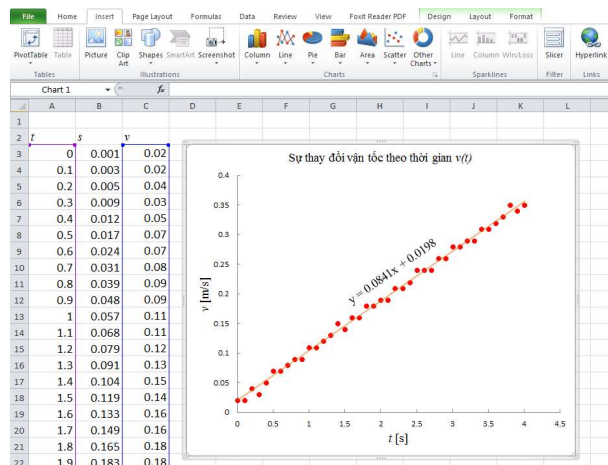
- **Power:** hàm lũy thừa dạng $y = ax^b$

Cụ thể trong ví dụ trên ta cần chọn dạng đường thẳng Linear để khớp hàm, đồng thời chọn chức năng Display Equation on Chart để hiển thị biểu thức hàm số lên trên đồ thị.



Hình 4: Lựa chọn dạng đường cong

Kết quả khớp hàm thể hiện trên hình 5.



Hình 5: Kết quả khớp dữ liệu

IV. ĐƯA RA NHẬN ĐỊNH

Sau khi thu được dạng hàm so sánh với đầy đủ các tham số, ta đã có thể đưa ra kết luận cụ thể về quy luật biến đổi của đại lượng vật lý đang khảo sát. Nếu đường khớp có hình dáng phù hợp, ôm theo dạng biến thiên của thực nghiệm, ta có thể nói rằng quy luật biến thiên đã dự đoán là phù hợp và xác đáng. Ngoài ra, các tham số trong biểu thức hàm khớp cũng nói lên một vài đặc tính của sự biến thiên.

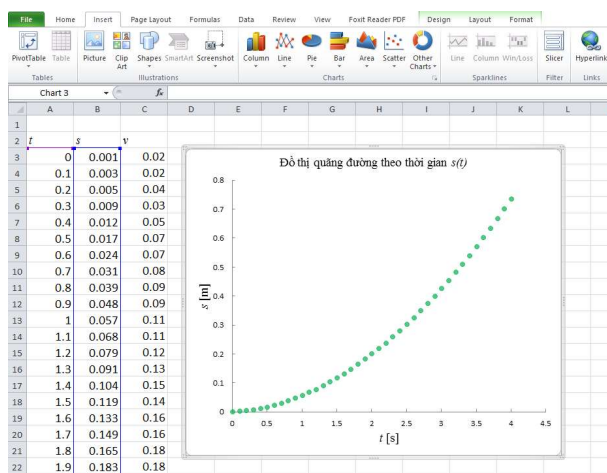
Quay lại ví dụ trên, từ kết quả khớp hàm ta thấy, vận tốc của vật có xu hướng thay đổi theo quy luật:

$$v = 0.0841t + 0.0198,$$

trong đó hệ số góc 0.0841 thể hiện độ lớn của gia tốc. Nói cách khác nhờ tính toán trên ta đã suy ra được rằng vật chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a = 0.0841 \text{ m/s}^2$.

V. KHỚP HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

Giả sử ta cần vẽ đồ thị $s(t)$ của quãng đường theo thời gian, cũng làm thao tác chèn đồ thị Menu Insert - Scatter - Scatter with Markers, để dàng thu được kết quả như hình 6.



Hình 6: Đồ thị quãng đường theo thời gian

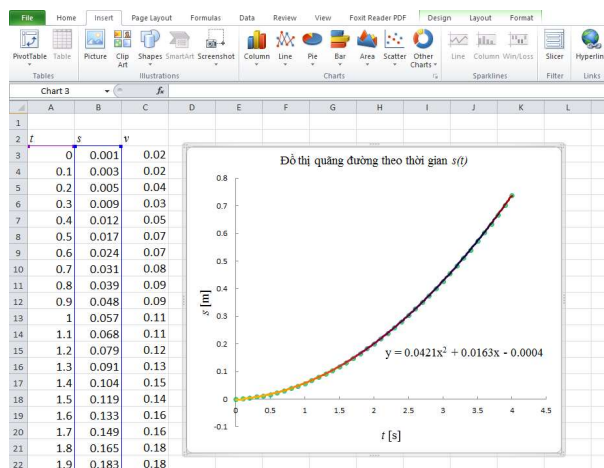
Có thể đoán nhận rằng, quãng đường vật đi được có dạng một đường cong bậc hai, tương ứng với phương trình chuyển động thẳng biến đổi đều:

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

Hãy tìm một hàm dạng:

$$y = ax^2 + bx + c$$

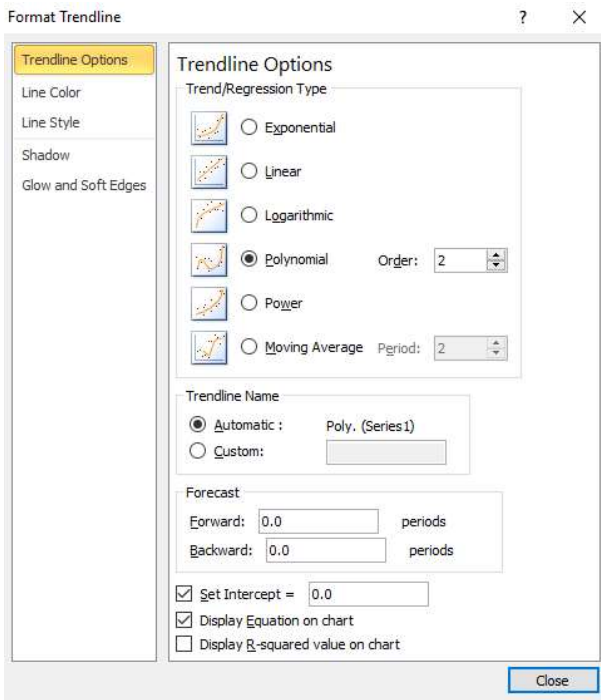
để so sánh với dữ liệu $s(t)$. Ta tiến hành khớp hàm bằng chức năng Add Trendline với lựa chọn Polynomial - Oder 2 để có được kết quả như hình 7.



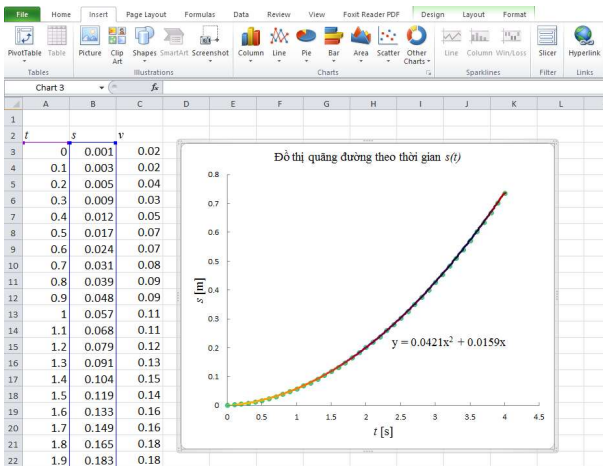
Hình 7: Kết quả khớp hàm thông thường bằng cung parabol

Quả thực đồ thị $s(t)$ có dạng một cung parabol bậc hai. Tuy nhiên cung này không đi qua gốc tọa độ vì có hệ số tự do 0.0004. Bây giờ ta muốn dùng một cung parabol phải đi qua gốc tọa độ nhằm thể hiện rằng, vật bắt đầu di chuyển từ đúng vạch 0. Ta hiệu chỉnh bằng cách vào Trendline Option, thêm Set Intercept = 0.0 (hình 8). Kết quả khớp hàm cuối cùng thể hiện trên hình 9.





Hình 8: Lựa chọn đường đa thức bậc hai đi qua điểm (0,0)



Hình 9: Kết quả khớp hàm bằng cung parabol đi qua gốc tọa độ