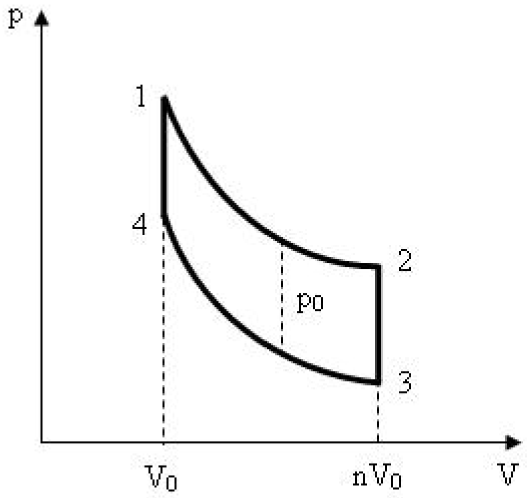
PHẦN THI GIẢI BÀI TẬP

(180 phút không kể thời gian phát đề)

Câu 1

Một khí lý tưởng đơn nguyên tử thực hiện chu trình 1-2-3-4-1 được mô tả trên giản đồ p-V như hình vẽ.



Biết rằng trong chu trình, thể tích nhỏ nhất của khí là V_0, thể tích lớn nhất gấp n lần. Các đoạn $2-3$ và $4-1$ là đẳng tích, đoạn $3-4$ là đoạn nhiệt, còn đoạn $1-2$ nhận được từ đoạn $3-4$ bằng cách dịch một đoạn có độ dài p_0 lên phía trên dọc theo trục áp suất.

a. Hãy xác định lượng nhiệt thu được hoặc tỏa ra trên các đoạn $1-2$, $2-3$, $4-1$.

b. Tính hiệu suất của chu trình trên.

Bài giải

a. Trên các đoạn đẳng tích $4-1$ và $2-3$, khí nhận nhiệt hay tỏa nhiệt chỉ làm thay đổi nội năng của nó:

$$U = \frac{3}{2}sRT = \frac{3}{2}pV \quad ,$$

trong đó s là số mol khí. Trên đoạn $4-1$, khí thu nhiệt ($Q_{4-1} > 0$), còn trên đoạn $2-3$, khí tỏa nhiệt ($Q_{2-3} < 0$). Ta có

$$Q_{4-1} = \Delta U_{4-1} = \frac{3}{2}p_0V_0 \quad , \tag{1}$$

$$Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} = -\frac{3}{2}np_0V_0 \quad . \tag{2}$$

Ở đây, ΔU_{4-1} và ΔU_{2-3} lần lượt là biến thiên nội năng của khí trên đoạn $4-1$ và $2-3$.

Ký hiệu sự phụ thuộc của áp suất vào thể tích trong quá trình đoạn nhiệt $3-4$ là

$$p = p_a(V) \quad .$$

Khi đó, theo đề bài, áp suất phụ thuộc vào thể tích trong quá trình $1-2$ được mô tả bởi phương trình
$$p = p_a(V) + p_0 \quad .$$
Lượng nhiệt ΔQ_{1-2} thu được trên đoạn này khi dãn nở một thể tích nhỏ ΔV bằng tổng của biến thiên nội năng và công thực hiện, tức là

$$\Delta Q_{1-2} = \Delta\left(\frac{3}{2}\left(p_a + p_0\right)V\right) + \left(p_a + p_0\right)\Delta V = \frac{5}{2}\left(p_a + p_0\right)\Delta V + \frac{3}{2}\Delta p_a V \quad . \qquad (3)$$

Tương tự, nhiệt lượng thu được trên đoạn $3-4$ khi dãn nở một thể tích nhỏ ΔV là

$$\Delta Q_{3-4} = \frac{5}{2}p_a\Delta V + \frac{3}{2}\Delta p_a V \quad . \qquad (4)$$

Tuy nhiên, quá trình $3-4$ là quá trình đoạn nhiệt nên $\Delta Q_{3-4} = 0$. Tính Δp_a từ phương trình (4), thế vào (3), ta nhận được

$$\Delta Q_{1-2} = \frac{5}{2}p_0\Delta V \quad .$$

Vậy lượng nhiệt khí nhận được trên đoạn $1-2$ là

$$Q_{1-2} = \frac{5}{2}p_0(n-1)V_0 \quad . \qquad (5)$$

b. Tổng nhiệt lượng khí nhận được từ nguồn nóng là

$$Q_+ = Q_{1-2} + Q_{4-1} = \frac{5}{2}p_0(n-1)V_0 + \frac{3}{2}p_0V_0 \quad .$$

Tổng nhiệt lượng khí nhả cho nguồn lạnh là

$$Q_- = |Q_{2-3}| = \frac{3}{2}np_0V_0 \quad .$$

Vậy hiệu suất của chu trình là

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{\frac{3}{2}np_0V_0}{\frac{5}{2}p_0(n-1)V_0 + \frac{3}{2}p_0V_0} = \frac{n-1}{\frac{5}{2}n - 1} \quad . \qquad (6)$$

Câu 2

Một vật liệu chiếm toàn bộ nửa không gian $z > 0$, mặt phẳng giới hạn tại $z = 0$. Miền $z < 0$ là chân không. Vật liệu này không dẫn điện (độ dẫn $\sigma = 0$), không nhiễm từ (hằng số từ thẩm $\mu = 1$), có chiết suất thực N_x đối với sóng phân cực thẳng theo phương trục x, N_y đối với phân cực thẳng theo phương trục y, khi sóng truyền theo phương trục z. $N_x > 1$ và $N_y > 1$ nhưng $N_x \neq N_y$. Không có điện tích và dòng điện tự do trên bề mặt cũng như bên trong vật liệu.

Một sóng ánh sáng phân cực elip phải truyền theo phương trục z đi từ miền $z < 0$ tới vuông góc với mặt phẳng phân cách của vật liệu. Véc tơ cường độ điện trường $\vec{E}_i$ của sóng tới có thể viết dưới dạng

$$\vec{E}_i = E_0 \left\{ \vec{x}\cos(kz - \omega t) - \frac{1}{2}\vec{y}\sin(kz - \omega t) \right\} \quad ,$$

trong đó $k = N\dfrac{\omega}{c}$, N là chiết suất của môi trường, $\vec{x}$, $\vec{y}$ và $\vec{z}$ là các véc tơ đơn vị của hệ trục tọa độ. Sóng phản xạ và sóng truyền qua cũng truyền theo phương trục z. Hãy tính hệ số phản xạ R, tức là tỉ số giữa cường độ sóng phản xạ và cường độ sóng tới.

Gợi ý: Véc tơ cảm ứng từ của sóng ánh sáng liên hệ với véc tơ điện trường bởi biểu thức

$$\vec{B} = \frac{N}{c}\vec{n} \times \vec{E} \quad .$$

Ở đây, $\vec{n}$ là véc tơ đơn vị xác định hướng truyền của sóng ánh sáng.

Bài giải

Ánh sáng tới có thể xem là tổ hợp của hai ánh sáng phân cực thẳng: ánh sáng phân cực thẳng theo chiều trục x có véc tơ điện trường $\vec{E}_{ix}$ và ánh sáng phân cực thẳng theo chiều trục y có véc tơ điện trường $\vec{E}_{iy}$

$$\vec{E}_{ix} = E_0\,\vec{x}\cos(kz - \omega t) \quad , \tag{1}$$

$$\vec{E}_{iy} = -\frac{1}{2}E_0\,\vec{y}\sin(kz - \omega t) \quad . \tag{2}$$

Ký hiệu $E_{ix} = E_0$, $E_{iy} = \dfrac{1}{2}E_0$. Theo định nghĩa, cường độ ánh sáng $I \sim \overline{\vec{E}^2}$, trong đó dấu $\overline{A}$ chỉ giá trị trung bình theo thời gian của A. Do đó, cường độ ánh sáng tới $I_i \sim \dfrac{5}{8}E_0^2$.

Vì véc tơ cảm ứng từ của sóng ánh sáng liên hệ với véc tơ điện trường bởi biểu thức

$$\vec{B} = \frac{N}{c}\vec{n} \times \vec{E} \quad .$$

nên ta có

$$\vec{B}_{(i,t)} = \frac{N_{(i,t)x}}{c}E_{(i,t)x}\,\vec{y}\cos(kz - \omega t) + \frac{N_{(i,t)y}}{c}E_{(i,t)y}\,\vec{x}\sin(kz - \omega t) \tag{3}$$

$$\vec{B}_r = -\frac{N_r}{c}\left\{E_{rx}\,\vec{y}\cos(-kz - \omega t) + E_{ry}\,\vec{x}\sin(-kz - \omega t)\right\} \quad . \tag{4}$$

Ở đây, chỉ số r, t để chỉ thành phần sóng phản xạ và truyền qua. Tại $z = 0$, thành phần tiếp tuyến của điện trường và từ trường phải liên tục. Do đó ta có các phương trình

$$E_{i(x,y)} + E_{r(x,y)} = E_{t(x,y)} \quad , \quad E_{i(x,y)} - E_{r(x,y)} = N_{(x,y)}E_{t(x,y)} \quad . \tag{5}$$

Giải hệ phương trình này, ta thu được

$$E_{r(x,y)} = \left(\frac{1 - N_{(x,y)}}{1 + N_{(x,y)}} \right) E_{i(x,y)} \quad . \tag{6}$$

Cường độ điện trường của ánh sáng phản xạ là

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= E_0 \left\{ \left(\frac{1 - N_x}{1 + N_x} \right) \vec{x} \cos(-kz - \omega t) - \right. \\ & \left. \qquad - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - N_y}{1 + N_y} \right) \vec{y} \sin(-kz - \omega t) \right\} \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Cường độ ánh sáng phản xạ là

$$\begin{aligned} I_r &\sim \frac{1}{2} \left(E_{rx}^2 + E_{ry}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} E_0^2 \left[\left(\frac{1 - N_x}{1 + N_x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1 - N_y}{1 + N_y} \right)^2 \right] \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Hệ số phản xạ R là

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{4}{5} \left[\left(\frac{1 - N_x}{1 + N_x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1 - N_y}{1 + N_y} \right)^2 \right] \quad . \tag{9}$$

Câu 3

Trong một mô hình của nguyên tử hydro ở trạng thái cơ bản, người ta coi nguyên tử này gồm:
- một proton tích điện $+e$ được coi là chất điểm đặt tại gốc tọa độ O,
- một đám mây tích điện âm có đối xứng cầu bao quanh proton.

Biết điện thế tại điểm M bất kỳ (OM$= r$) có dạng:

$$V(r) = \frac{a}{r}e^{-br} \qquad \text{(với } a \text{ và } b \text{ là các hằng số dương)} \quad ,$$

1. **a**) Hãy xác định điện trường $\vec{E}(r)$ tại điểm M.

b) Tính điện tích của đám mây tích điện âm nằm trong mặt cầu tâm O bán kính r.

2. **a**) Tính mật độ điện tích $\rho(r)$ của đám mây điện tích âm theo a và b.

b) Từ điều kiện trung hòa về điện của nguyên tử hãy tính hằng số a theo e và ϵ_0.

3. Tính thế tĩnh điện $V'(r)$ do đám mây tích điện âm gây ra tại điểm M (OM$= r$).

4. Tính theo a và b các đại lượng sau:

a) Năng lượng W_{hn} của hạt nhân trong đám mây điện tích âm.

b) Năng lượng toàn phần W của nguyên tử hydro.

Bài giải

1. **a**) Do tính đối xứng cầu của mô hình nguyên tử, điện trường $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ tại M có hướng xuyên tâm và có độ lớn chỉ phụ thuộc vào r =OM, cụ thể là

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{a\exp(-br)}{r^2}(1+br)\frac{\vec{r}}{r} \quad . \\ E &\equiv |\vec{E}| = \frac{a\exp(-br)}{r^2}(1+br) \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

b) Ký hiệu $q(r)$ là điện tích của đám mây điện tích âm nằm trong mặt cầu tâm O bán kính r. Theo định lý Gauss, thông lượng điện trường qua mặt cầu tâm O bán kính r chứa điện tích $+e$ ở tâm và điện tích âm $q(r)$ cho bởi biểu thức

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\left(e + q(r)\right) \quad . \tag{2}$$

Thay E từ (1) vào (2), ta nhận được

$$4\pi a(1+br)e^{-br} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(e + q(r)\right) \quad .$$

Từ đó suy ra

$$q(r) = -e + 4\pi\epsilon_0 a(1+br)e^{-br} \quad . \tag{3}$$

2. **a**) Gọi mật độ điện tích âm tại điểm cách tâm O khoảng r là $\rho(r)$. Điện tích âm trong không gian giữa hai mặt cầu có bán kính r và $r + dr$ là

$$\rho(r)4\pi r^2 dr = q(r+dr) - q(r) = q(r) + \frac{dq}{dr}dr - q(r) = \frac{dq}{dr}dr \quad .$$

Suy ra

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dq}{dr} \quad . \tag{4}$$

Thay q từ (3) vào (4), ta được

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} 4\pi\epsilon_0 a e^{-br}[b - b(1+br)] \quad ,$$

hay

$$\rho(r) = -\frac{\epsilon_0 a b^2}{r} e^{-br} \quad . \tag{5}$$

b) Do tính trung hòa về điện của nguyên tử, điện tích âm tổng cộng phải bằng $-e$ cân bằng với điện tích $+e$ của hạt nhân, nên ta có

$$-e = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr \quad .$$

Thay $\rho(r)$ từ (5), ta nhận được

$$-e = -4\pi\epsilon_0 a b^2 \int_0^\infty r e^{-br} dr \quad .$$

Lấy tích phân theo từng phần, cuối cùng, ta được

$$a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \quad . \tag{6}$$

Cách khác: Ta có $\lim_{r\to 0} q(r) = 0$. Sử dụng (3) ta có (6).

3. Dùng (6) ta có thế tĩnh điện toàn phần tại M là

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-br} \quad .$$

Mặt khác, hạt nhân tại O gây ra tại M điện thế $\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$. Vậy đóng góp của đám mây điện tích âm vào điện thế toàn phần là

$$V'(r) = V(r) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}\left[e^{-br} - 1\right] \quad . \tag{7}$$

4. **a**) Hạt nhân có điện tích $+e$ đặt tại O ($r \to 0$). Tại điểm O đám mây tích điện âm gây ra điện thế $V'(\mathrm{O})$, nên hạt nhân có năng lượng bằng

$$W_{hn} = +eV'(\mathrm{O}) \quad ,$$

trong đó $V'(\mathrm{O})$ là giới hạn của $V'(r)$ khi $r \to 0$. Dùng khai triển

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$$

cho $|x| \ll 1$, từ (7) ta có

$$V'(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}\left(1 - br + \frac{b^2 r^2}{2} + \ldots - 1\right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left(-b + \frac{b^2 r}{2} + \ldots\right) \quad ,$$

suy ra

$$V'(\mathrm{O}) = \lim_{r\to 0} V'(r) = -\frac{eb}{4\pi\epsilon_0} \quad .$$

Do đó

$$W_{hn} = +eV'(\mathrm{O}) = -\frac{e^2 b}{4\pi\epsilon_0} \quad . \tag{8}$$

b) Năng lượng riêng W_e của đám mây tích điện âm với mật độ $\rho(r)$ bằng

$$W_e = \frac{1}{2}\int_0^\infty V'(r)\rho(r)4\pi r^2 dr \quad . \tag{9}$$

Thay (5), (6) và (7) vào (9), ta nhận được

$$W_e = -\frac{e^2b^2}{8\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \left[e^{-2br} - e^{-br}\right] dr = \frac{e^2 b}{16\pi\epsilon_0} \quad .$$

Vậy, năng lượng toàn phần của nguyên tử hydro bằng

$$W = W_{hn} + W_e = -\frac{3e^2b}{16\pi\epsilon_0} \quad . \tag{10}$$

Câu 4

Một người quan sát đứng yên so với một ngôi sao cố định ở rất xa (hệ quy chiếu S). Người này nhìn thấy các ngôi sao phân bố đẳng hướng, tức là số ngôi sao người này nhìn thấy trong góc khối $d\Omega$ bằng $dN = N\dfrac{d\Omega}{4\pi}$ với N là tổng số sao người này nhìn thấy.
Giả sử một người quan sát khác chuyển động với tốc độ tương đối tính $v = \beta c$ theo hướng trục x (hệ quy chiếu riêng là S'). Hỏi người này nhìn thấy các ngôi sao phân bố như thế nào, nghĩa là hàm phân bố $P(\theta', \varphi')$ có dạng thế nào, nếu số ngôi sao người này nhìn thấy trong góc khối $d\Omega'$ của mình là $P(\theta', \varphi')d\Omega'$? Kiểm tra để thấy rằng

$$\int P(\theta', \varphi')d\Omega' = N \qquad \text{và} \qquad P(\theta', \varphi') \to \frac{N}{4\pi} \text{ khi } \beta \to 0 \quad .$$

Người quan sát này thấy các sao chụm lại ở đâu?

Gợi ý: Trong hệ tọa độ cầu (r, θ, φ), góc khối $d\Omega$ được cho bởi biểu thức

$$d\Omega = d(\cos\theta)\, d\varphi = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Bài giải

Ký hiệu S là hệ quy chiếu gắn với người quan sát đứng yên. Xét photon có động lượng $\vec{p}$, năng lượng $E = pc$ trong hệ S (động lượng $\vec{p}'$, năng lượng $E' = p'c$ trong hệ S'). Ta có

$$p_x = p\cos\theta = \gamma\left(p_x' + \frac{v}{c^2}E'\right) = \gamma p'\left(\cos\theta' + \beta\right) \qquad , \qquad p_y = p\sin\theta = p_y' = p'\sin\theta' \quad ,$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \quad ,$$

trong đó θ (θ') là góc giữa $\vec{p}$ ($\vec{p}'$) với trục x (x').

Mặt khác, ta cũng có

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = p'\sqrt{\gamma^2\left(\cos\theta' + \beta\right)^2 + \sin^2\theta'} = \gamma p'\left(1 + \beta\cos\theta'\right) \quad .$$

Do đó,

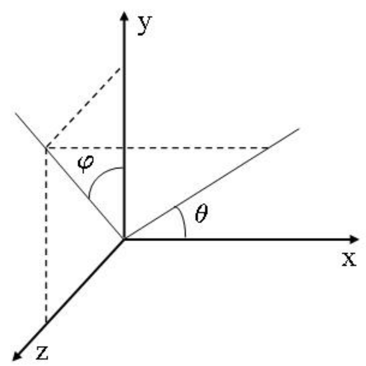
$$\cos\theta = \frac{\gamma p'}{p}\left(\beta + \cos\theta'\right) = \frac{\beta + \cos\theta'}{1 + \beta\cos\theta'} \quad . \tag{1}$$

Lấy vi phân hai vế của phương trình trên, ta nhận được

$$d(\cos\theta) = \frac{1-\beta^2}{\left(1 + \beta\cos\theta'\right)^2}\, d(\cos\theta') \quad .$$

Ký hiệu φ (φ') là góc cực trong mặt phẳng yz (mặt phẳng $y'z'$) (xem hình vẽ). Rõ ràng là

$$\varphi = \varphi' \quad . \tag{2}$$



Như vậy, số lượng sao dN người quan sát trong hệ S nhìn thấy trong góc khối $d\Omega$ theo hướng xác định bởi các góc (θ, φ) bằng số lượng sao dN' người quan sát trong hệ S' nhìn thấy trong góc khối $d\Omega'$ xác định bởi các góc (θ', φ'), trong đó các góc này liên hệ với nhau bởi các phương trình (1) và (2). Do đó,

$$dN = \frac{N}{4\pi} d\Omega = \frac{N}{4\pi} d(\cos\theta) d\varphi = \frac{N}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2} d(\cos\theta') d\varphi' = \frac{N}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2} d\Omega' = dN' \quad .$$

Theo định nghĩa, hàm phân bố sao trong hệ S' là

$$P(\theta', \varphi') = \frac{N}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2} \quad .$$

Dễ dàng thử lại:

$$P(\theta', \varphi') \to \frac{N}{4\pi} \qquad \text{khi} \qquad \beta \to 0 \quad .$$

$$\int P(\theta', \varphi') d\Omega' = \int_{-1}^{1} d(\cos\theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \frac{N}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1+\beta\cos\theta')^2} = \frac{N}{2} \int_{-1}^{1} dx \, \frac{1-\beta^2}{(1+\beta x)^2} = N \quad .$$

Người quan sát S' nhìn thấy sao chụm lại ở hướng mà hàm phân bố có giá trị lớn nhất, hay là biểu thức $(1+\beta\cos\theta')^2$ có giá trị nhỏ nhất, ứng với $\cos\theta' = -1$ hay $\theta' = \pi$. Điều đó có nghĩa người quan sát S' nhìn thấy các sao tụ lại ở lân cận điểm xa vô cùng trên trục x' về phía giá trị âm, mặc dù sao phân bố đồng đều theo mọi hướng trong hệ S.