Chương 11: Mômen động lượng

Chủ đề trung tâm của chương này là mômen động lượng, là đại lượng đóng vai trò quan trọng trong động lực học chuyển động quay. Tương tự như nguyên lý bảo toàn động lượng, ta cũng có nguyên lý bảo toàn mômen động lượng. Mômen động lượng của một hệ cô lập là không đổi. Đối với mômen động lượng, một hệ cô lập là một hệ không có các mômen ngoại lực tác dụng lên hệ. Nếu có mômen ngoại lực tác dụng lên hệ thì hệ đó không cô lập. Giống như định luật bảo toàn động lượng, định luật bảo toàn mômen động lượng là một định luật cơ bản của vật lý, nó cũng có giá trị đối với các hệ tương đối và lượng tử.

11.1 Tích vectơ và mômen lực

Điều quan trọng khi xác định mômen động lượng là nhân 2 vectơ bằng toán tử tích có hướng.

Xét lực $\vec{F}$ tác dụng lên chất điểm tại vị trí vecto $\vec{r}$ (hình 11.1). Như đã biết trong mục 10.6, độ lớn của mômen lực của lực này đối với một trục quay đi qua gốc là $rF\sin\varphi$, trong đó φ là góc giữa các vectơ $\vec{r}$ và $\vec{F}$. Trục mà lực $\vec{F}$ có xu hướng tạo ra chuyển động quay quanh nó là trục vuông góc với mặt phẳng tạo bởi các vectơ $\vec{r}$ và $\vec{F}$.

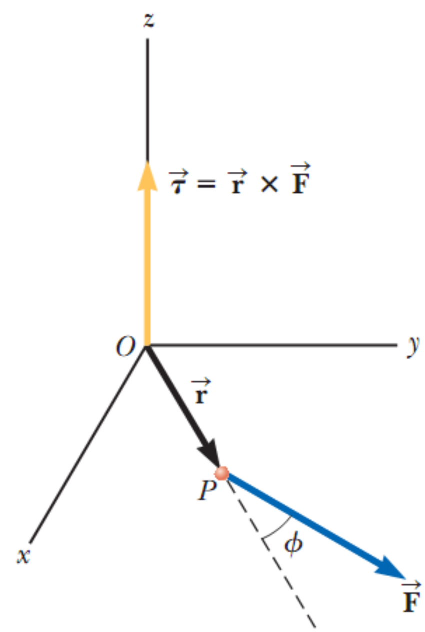
Vectơ mômen lực $\vec{\tau}$ được liên kết với các vectơ $\vec{r}$ và $\vec{F}$. Ta có thể thiết lập một mối liên hệ toán học giữa $\vec{\tau}$, $\vec{r}$ và $\vec{F}$ bởi một toán tử được gọi là tích vectơ:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (11.1)$$

Bây giờ ta đưa ra một định nghĩa chính thức của tích vectơ. Cho trước hai vectơ $\vec{A}$ và $\vec{B}$ bất kì, tích vectơ $\vec{A} \times \vec{B}$ được định nghĩa như là vectơ thứ ba $\vec{C}$ có độ lớn bằng $AB\sin\theta$, trong đó θ là góc giữa hai vectơ $\vec{A}$ và $\vec{B}$. Tức là nếu $\vec{C}$ được cho bởi $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ thì độ lớn của nó là $C = AB\sin\theta$.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \qquad (11.2)$$

$$C = AB\sin\theta \qquad (11.3)$$

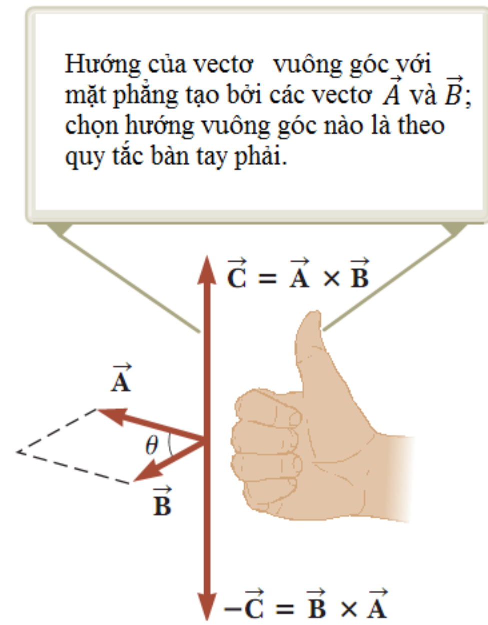


Hình 11.1: Vectơ mômen lực $\vec{\tau}$ hướng vuông góc với mặt phẳng tạo bởi vectơ vị trí $\vec{r}$ và vectơ lực tác dụng $\vec{F}$. Trên hình vẽ này, $\vec{r}$ và $\vec{F}$ nằm trong mặt phẳng xy, nên mômen lực dọc theo trục z.

Đại lượng $AB\sin\theta$ bằng diện tích của hình bình hành tạo bởi hai vectơ $\vec{A}$ và $\vec{B}$ như chỉ ra trên hình 11.2. Hướng của vectơ $\vec{C}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai vectơ $\vec{A}$ và $\vec{B}$, và để xác định hướng này có thể dùng quy tắc bàn tay phải được minh họa trên hình 11.2. Bốn ngón tay của bàn tay phải được chỉ theo chiều vecto $\vec{A}$, sau đó được nắm theo hướng quay từ $\vec{A}$ đến $\vec{B}$ qua góc θ. Hướng ngón tay cái chỉ lên là hướng của $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$. Phép nhân vecto $\vec{A} \times \vec{B}$ thường được gọi là "**tích chéo**".

Một số tính chất của phép nhân có hướng rút ra từ định nghĩa:

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
2. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ (11.4)
3. Nếu $\vec{A}$ vuông góc $\vec{B}$ thì $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.
4. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ (11.5)
5. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$ (11.6)



Hình 11.2: Tích vecto $\vec{A} \times \vec{B}$ là vecto $\vec{C}$ có độ lớn bằng $AB \sin\theta$, bằng diện tích của hình bình hành trong hình vẽ.

Tích chéo của hai vecto $\vec{A}$ và $\vec{B}$ bất kì có thể được biểu diễn theo dạng định thức sau:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Khai triển các định thức này được kết quả sau:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{\imath} - \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\hat{\jmath} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{z} \quad (11.8)$$

Nắm được định nghĩa tích vectơ, ta có thể xác định hướng của vectơ mômen lực. Nếu lực nằm trong mặt phẳng xy như trên hình 11.1, mômen lực $\vec{\tau}$ được biểu diễn bằng một vectơ song song với trục z. Lực trên hình 11.1 tạo ra một mômen có xu hướng làm quay vật ngược chiều kim đồng hồ xung quanh trục z. Hướng của $\vec{\tau}$ theo hướng dương của trục z.

11.2 Mô hình phân tích : Hệ không cô lập (mômen động lượng)

Hình dung một cái cột được dựng lên trên một hồ nước đóng băng (hình 11.3). Một người trượt băng trượt nhanh về phía cái cột, theo hướng hơi lệch sang bên để không va vào cái cột. Khi cô ta trượt ngang qua cái cột, cô ta chìa tay ra bên hông và túm lấy cái cột. Hành động này làm cho cô ta chuyển động tròn xung quanh cái cột. Giống như ý tưởng về động lượng giúp ta phân tích chuyển động tịnh tiến, một sự tương tự trong chuyển động quay, mômen động lượng, giúp ta phân tích chuyển động của vận động viên trượt băng này và các vật khác trong chuyển động tròn.

Trong chương 9 ta đã trình bày dạng toán học của động lượng và sau đó đã chỉ ra đại lượng này có giá trị như thế nào trong việc giải bài toán. Ta sẽ theo các thủ tục tương tự đối với mômen động lượng.

Xét một chất điểm khối lượng m có bán kính vecto $\vec{r}$, chuyển động với động lượng $\vec{p}$ như trên hình 11.4. Khi mô tả chuyển động tịnh tiến, ta thấy rằng hợp lực tác dụng lên chất điểm bằng tốc độ thay đổi theo thời gian của động lượng của chất điểm, $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$ (xem phương trình 9.3). Nhân có hướng các vế của phương trình (9.3) với $\vec{r}$, vế trái sẽ cho mômen lực:

$$\vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Tiếp theo cộng vào vế phải số hạng $(d\vec{r}/dt) \times \vec{P}$, là số hạng bằng 0, vì $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, mà $\vec{v}//\vec{p}$. Do đó:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

Vế phải của phương trình này là đạo hàm của $\vec{r} \times \vec{p}$, xem phương trình (11.6). Do đó:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\,(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \tag{11.9}$$

Phương trình này có dạng tương tự phương trình 9.3.

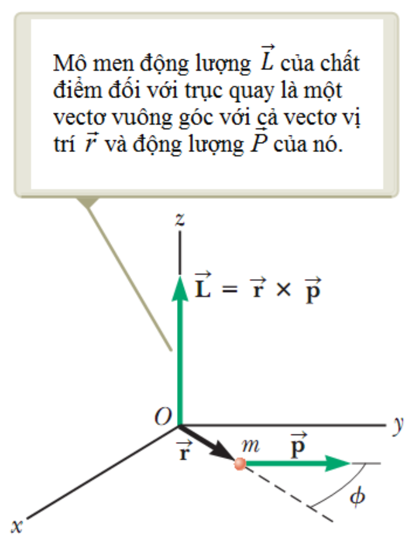
Vì trong chuyển động quay mômen lực đóng vai trò giống như vai trò của lực trong chuyển động tịnh tiến, kết quả này gợi ý rằng tổ hợp $\vec{r} \times \vec{p}$ trong chuyển động quay đóng vai trò như vai trò của $\vec{p}$ trong chuyển động tịnh tiến. Ta gọi tổ hợp này là mômen động lượng của chất điểm:

"Mômen động lượng tức thời $\vec{L}$ của một chất điểm đối với một trục quay đi qua gốc O được xác định bởi tích có hướng của véc tơ vị trí tức thời $\vec{r}$ của chất điểm và động lượng tức thời $\vec{p}$ của nó:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \tag{11.10}$$

Bây giờ ta có thể viết (11.9) như sau:

Hình 11.3: Khi người trượt băng trượt ngang qua cái cột, cô ta chìa tay chụp lấy cái cột. Động tác này làm cho cô ta quay nhanh quanh cái cột theo vòng tròn.



Hình 11.4: Mômen động lượng $\vec{L}$ của chất điểm là một véctơ cho bởi $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (11.11)$$

Có dạng giống như định luật 2 Newton của chuyển động thẳng, $\sum \vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt}$. Mômen lực làm cho mômen động lượng thay đổi giống như lực làm cho động lượng thay đổi.

Chú ý rằng (11.11) đúng chỉ nếu $\sum \vec{\tau}$ và $\vec{L}$ được đo với cùng một trục. Công thức này cũng đúng đối với trục quay cố định bất kì trong một hệ quy chiếu quán tính.

Đơn vị trong hệ SI của mômen động lượng là kg.m^2/s. Cũng chú ý là cả độ lớn và hướng của $\vec{L}$ phụ thuộc vào việc chọn trục. Theo quy tắc bàn tay phải, ta thấy hướng của $\vec{L}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi $\vec{r}$ và $\vec{p}$. Trên hình 11.4, $\vec{r}$ và $\vec{p}$ nằm trong mặt phẳng xy, do đó $\vec{L}$ hướng theo trục z. Vì $\vec{p} = m\vec{v}$, độ lớn của $\vec{L}$ là:

$$L = mvr\sin\phi \qquad (11.12)$$

Trong đó ϕ là góc giữa $\vec{r}$ và $\vec{p}$ và L=0 khi $\vec{r}\ //\ \vec{p}$. Nói cách khác, khi vận tốc tịnh tiến của chất điểm hướng dọc theo đường thẳng đi qua trục quay, chất điểm có mômen động lượng bằng không so với trục. Mặt khác, nếu $\vec{r}$ vuông góc $\vec{p}$, thì $L = mvr$. Khi đó, chất điểm chuyển động như trường hợp nó nằm trên mép của bánh xe đang quay quanh trục trong mặt phẳng tạo bởi $\vec{r}$ và $\vec{p}$.

Mômen động lượng của hệ chất điểm

Dùng các kỹ thuật như trong mục 9.7, ta có thể chỉ ra rằng định luật 2 Newton đối với hệ chất điểm là:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}$$

Phương trình này cho thấy tổng ngoại lực tác dụng lên hệ chất điểm thì bằng tốc độ biến thiên theo thời gian của động lượng toàn phần của hệ.

Ta hãy xem một phát biểu tương tự như vậy có thể được thực hiện đối với chuyển động quay hay không. Mômen động lượng toàn phần của hệ chất điểm đối với một trục quay nào đó được xác định bằng tổng véctơ mômen động lượng của từng chất điểm riêng biệt:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots + \vec{L}_n = \sum \vec{L}_i$$

trong đó tổng vectơ được lấy trên toàn bộ n chất điểm của hệ.

Lấy đạo hàm biểu thức này theo thời gian ta có:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Ở đây ta đã dùng phương trình (11.11) để thay thế tốc độ biến thiên theo thời gian của mômen động lượng của mỗi chất điểm với mômen lực tác dụng lên mỗi chất điểm.

Các mômen lực tác dụng lên các chất điểm của hệ là các mômen lực liên kết với các nội lực giữa các chất điểm và các mômen lực liên kết với các ngoại lực. Tuy nhiên, tổng các mômen lực liên kết với các nội lực giữa các chất điểm thì bằng không. Nhắc lại rằng theo định luật 3 Newton thì các nội lực giữa các chất điểm bằng nhau về độ lớn nhưng ngược hướng. Nếu ta giả sử các lực này nằm trên đường thẳng nối từng cặp chất điểm, mômen lực tổng cộng xung quanh trục quay bất kì đi qua gốc O do mỗi cặp lực-phản lực gây ra bằng không (tức là cánh tay đòn từ O tới giá của các lực thì bằng nhau đối với cả 2 chất điểm, và các lực ngược hướng nhau). Do đó, tổng các mômen nội lực bằng không. Ta kết luận rằng mômen động lượng toàn phần của một hệ biến thiên theo thời gian chỉ khi có mômen ngoại lực tác dụng lên hệ:

$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \tag{11.13}$$

Mômen ngoại lực tác dụng lên hệ bằng tốc độ biến thiên theo thời gian của mômen động lượng toàn phần của hệ đó.

Phương trình này trong chuyển động quay tương tự với phương trình $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}$ đối với hệ chất điểm. Phương trình 11.13 là biểu diễn toán học của sự diễn tả mô hình hệ không cô lập mômen động lượng. Nếu hệ không cô lập theo nghĩa có mômen lực tác dụng lên nó, thì mômen lực bằng tốc độ biến thiên theo thời gian của mômen động lượng.

Mặc dù ta không chứng minh ở đây, nhưng phát biểu này là đúng bất kể chuyển động của khối tâm. Nó có thể áp dụng ngay cả khi khối tâm đang gia tốc, miễn là mômen lực và mômen động lượng được đánh giá so với một trục quay đi qua khối tâm.

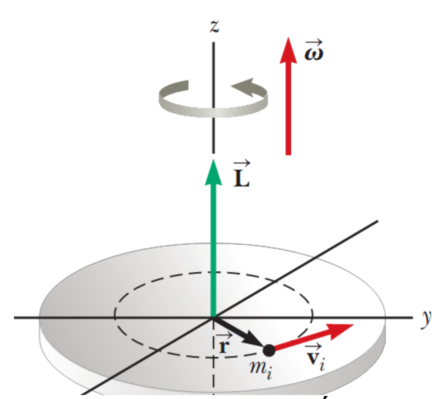
Sắp xếp lại phương trình 11.13 và lấy tích phân ta được

$$\int \left(\sum \vec{\tau}_{ext}\right) dt = \Delta \vec{L}_{tot}$$

Phương trình này trong chuyển động quay tương tự với phương trình của định lí xung lực-động lượng của hệ chất điểm (9.40). Phương trình này biểu diễn *định lí xung lượng của mômen lực- mômen động lượng*.

11.3 Mômen động lượng của vật rắn quay

Trong ví dụ 11.4, ta đã khảo sát mômen động lượng của một hệ có thể biến dạng. Bây giờ ta sẽ tập trung sự chú ý vào hệ không biến dạng, gọi là vật rắn. Xét vật rắn quay quanh một trục cố định trùng với trục z của hệ tọa độ như chỉ ra trên hình 11.7.



Hình 11.7: Khi vật rắn quay quanh trục, mômen động lượng $\vec{L}$ cùng hướng với vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$, theo mối liên hệ $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Ta hãy xác định mômen động lượng của vật này. Mỗi chất điểm của vật này quay trong một mặt phẳng xy quanh trục z với tần số góc ω. Độ lớn của mômen động lượng của chất điểm khối lượng m_i quanh trục z là $m_i v_i r_i$. Do $v_i = r_i\omega$ (phương trình 10.10), ta có thể biểu diễn độ lớn của mômen động lượng của chất điểm này bằng:

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

Vectơ $\vec{L}_i$ đối với chất điểm này hướng dọc theo trục z, giống như véctơ $\vec{\omega}$.

Bây giờ ta có thể tìm mômen động lượng (trong trường hợp này chỉ có 1 thành phần z) của toàn bộ vật bằng cách lấy tổng L_i trên toàn bộ các chất điểm:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

$$L_z = I\omega \tag{11.14}$$

trong đó $\sum_i m_i r_i^2$ là mômen quán tính I của vật rắn đối với trục z (phương trình 10.15).

Bây giờ ta lấy đạo hàm phương trình (11.14) theo thời gian, chú ý I là hằng số đối với vật rắn:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \tag{11.15}$$

Trong đó α là gia tốc góc so với trục quay.

Vì $\frac{dL_z}{dt}$ bằng mômen ngoại lực (phương trình 11.13), ta có thể viết phương trình11.15 như sau:

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha \tag{11.16}$$

Đây là định luật 2 Newton đối với chuyển động quay.

Tức là, mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn quay quanh một trục cố định thì bằng mômen quán tính đối với trục quay đó nhân với gia tốc góc đối với trục đó. Kết quả này giống như phương trình (10.21), thu được bằng cách tiếp cận lực, nhưng ta thu được phương trình (11.16) bằng cách dùng khái niệm mômen động lượng. Như đã thấy trong mục 10.7, phương trình (11.16) là biểu diễn toán học của mô hình phân tích vật rắn chịu tác dụng của một mômen lực. Phương trình này cũng đúng cho vật rắn quay quanh một trục chuyển động, với điều kiện là trục chuyển động này (1) đi qua khối tâm và (2) là một trục đối xứng.

Nếu một vật thể đối xứng quay quanh một trục cố định đi qua khối tâm của nó, bạn có thể viết phương trình (11.14) theo dạng véctơ $\vec{L} = I\vec{\omega}$, trong đó $\vec{L}$ là mômen động lượng toàn phần của vật rắn được tính so với trục quay. Hơn nữa, biểu thức này đúng cho vật bất kì, bất kể tính đối xứng của nó, nếu $\vec{L}$ ứng với thành phần mômen động lượng dọc theo trục quay.

11.4 Mô hình phân tích: hệ cô lập (mômen động lượng)

Trong chương 9 ta đã thấy rằng động lượng toàn phần của một hệ chất điểm là không đổi nếu hệ cô lập, tức là khi ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không. Trong chuyển động quay, ta cũng có một định luật bảo toàn tương tự:

"Mômen động lượng toàn phần của một hệ không đổi cả độ lớn và hướng (bảo toàn) nếu tổng mômen ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không, hoặc hệ cô lập".

Phát biểu này thường được gọi là **nguyên lý bảo toàn mômen động lượng** và là cơ sở cho **cách diễn tả mômen động lượng của mô hình hệ cô lập**.

Nguyên lý này được dẫn ra trực tiếp từ phương trình11.13, trong đó chỉ ra rằng nếu

$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 0 \tag{11.17}$$

thì

$$\vec{L} = \text{const} \quad \text{hay} \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f \tag{11.18}$$

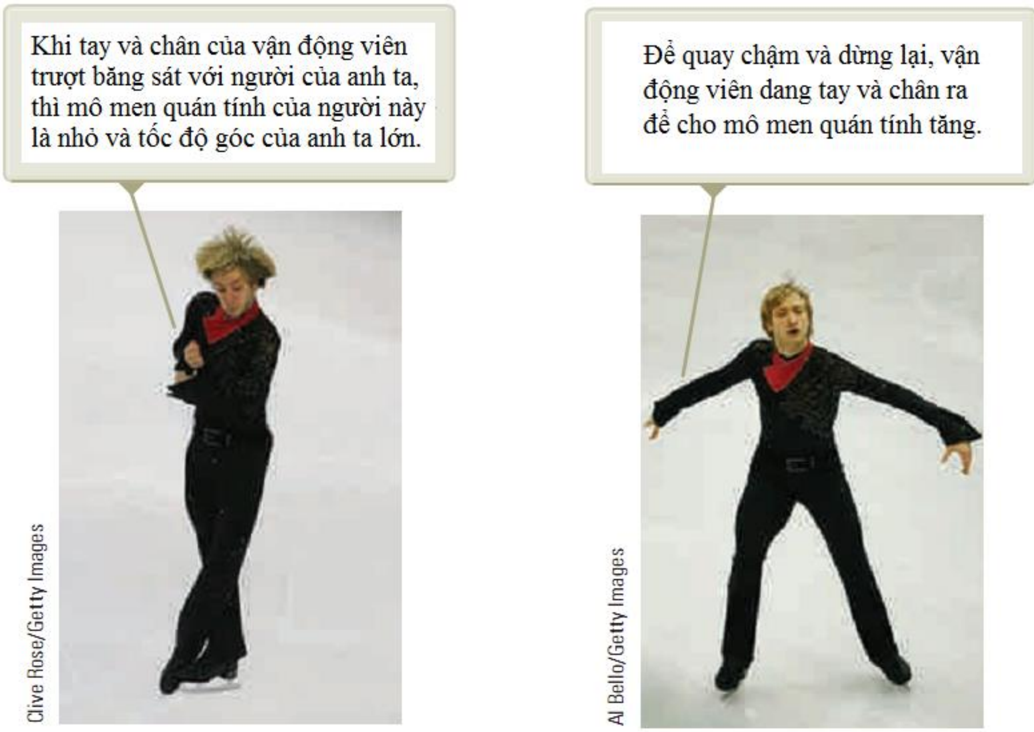
Đối với hệ cô lập gồm một số chất điểm, ta viết định luật bảo toàn này là $\vec{L}_{tot} = \sum \vec{L}_n = const$, trong đó chỉ số n biểu thị chất điểm thứ n trong hệ.

Nếu một hệ cô lập đang quay, có thể biến dạng sao cho khối lượng của nó bị phân bố lại theo một cách nào đó, thì mômen quán tính của hệ thay đổi. Vì độ lớn mômen động lượng của hệ là $L = I\omega$ (phương trình 11.14). Sự bảo toàn mômen động lượng đòi hỏi tích của I và ω là hằng số. Do đó mỗi sự thay đổi của I đòi hỏi có một sự thay đổi của ω. Trong trường hợp này ta có thể biểu diễn nguyên lý bảo toàn mômen động lượng như sau:

$$L_i\omega_i = L_f\omega_f = \text{const} \tag{11.19}$$

Biểu thức này đúng cho cả chuyển động quay quanh trục cố định và chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm của hệ chuyển động, miễn là trục đó được giữ cố định theo một hướng. Ta chỉ cần mômen ngoại lực bằng không.

Nhiều ví dụ chứng tỏ sự bảo toàn mômen động lượng của hệ biến dạng. Bạn có thể đã từng quan sát động tác quay của một người trượt băng ở phần cuối của chương trình biểu diễn (Hình 11.10). Tốc độ góc của người trượt băng lớn khi tay và chân của anh ta gần người của anh ta. Bỏ qua ma sát giữa người và băng, khi đó không có mômen ngoại lực tác dụng lên người trượt băng. Mômen quán tính của người tăng khi tay và chân anh ta duỗi ra khi kết thúc động tác quay. Theo nguyên lý bảo toàn mômen động lượng, tốc độ góc của anh ta sẽ giảm. Tương tự, khi thợ lặn hoặc người nhào lộn muốn thực hiện động tác nhào lộn, họ thu tay và chân sát thân mình để tăng tốc độ quay. Trong các trường hợp này, ngoại lực do trọng lực tác dụng lên khối tâm, do đó không gây ra mômen lực đối với trục quay đi qua điểm này. Cho nên, mômen động lượng đối với khối tâm được bảo toàn, tức là $I_i\omega_i = I_f\omega_f$. Ví dụ khi người thợ lặn muốn tăng gấp đôi tốc độ góc, anh ta phải giảm mômen quán tính xuống một nửa giá trị ban đầu.



Hình 11.10: Mômen động lượng được bảo toàn khi vận động viên Evgeni Plushenko người Nga giành huy chương vàng thực hiện trong Olympic Mùa đông ở Turin năm 2006.

Trong phương trình (11.18), ta có một cách diễn tả thứ 3 về mô hình hệ cô lập. Bây giờ ta có thể phát biểu rằng năng lượng, động lượng, và mômen động lượng của một hệ cô lập đều không đổi.

$E_i = E_f$ (nếu không có năng lượng truyền qua biên giới của hệ)

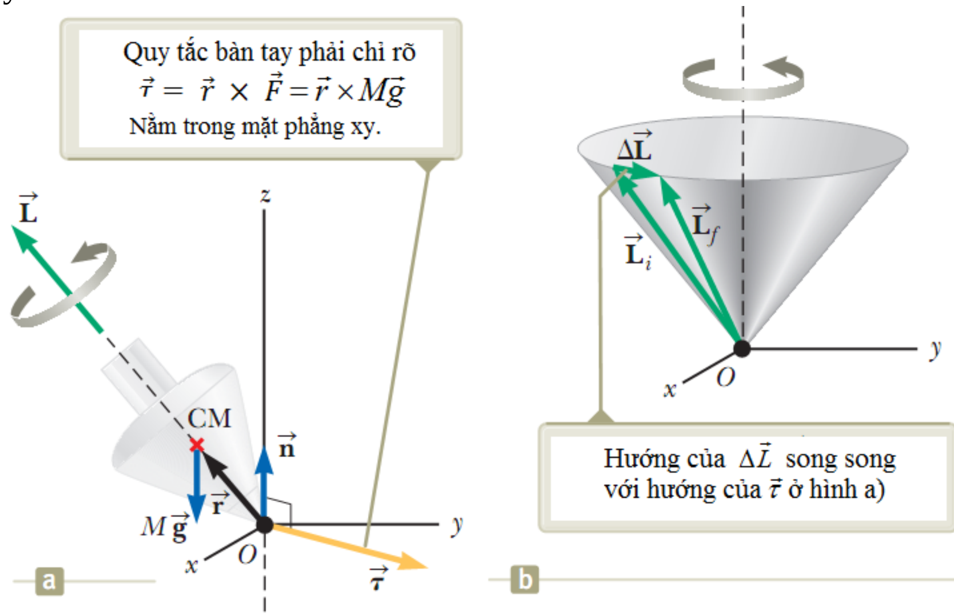
$\vec{P}_i = \vec{P}_f$ (nếu ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không)

$\vec{L}_i = \vec{L}_f$ (nếu mômen ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không)

Một hệ có thể là cô lập nếu xét theo một trong các đại lượng này, nhưng không cô lập nếu xét theo các đại lượng khác. Nếu hệ không cô lập xét về mặt động lượng hoặc mômen động lượng, nó thường sẽ không cô lập dưới dạng năng lượng vì có một lực hoặc mômen lực tác dụng lên hệ, và lực hoặc mômen lực này sẽ thực hiện công lên hệ. Tuy nhiên ta có thấy các hệ không cô lập xét về mặt năng lượng nhưng cô lập xét về mặt động lượng. Ví dụ, tưởng tượng bóp vào quả bóng (xem như hệ) trong tay bạn. Công được thực hiện để nén quả bóng cho nên hệ không cô lập về năng lượng, nhưng không có lực nào tác dụng lên hệ, cho nên hệ cô lập về động lượng. Có thể phát biểu tương tự đối với việc xoắn hai đầu một mẫu kim loại dài, dễ co giãn bằng cách dùng hai tay. Công được thực hiện lên mẫu kim loại (hệ), cho nên năng lượng được tích trữ trong hệ không cô lập dưới dạng thế năng đàn hồi, nhưng mômen lực tác dụng lên hệ bằng không. Do đó hệ cô lập xét về mặt mômen động lượng. Một số ví dụ khác là va chạm của các vật lớn, trong đó thể hiện các hệ cô lập về động lượng nhưng các hệ không cô lập về năng lượng do năng lượng của hệ được giải phóng ra dưới dạng các sóng cơ (âm thanh).

11.5 Chuyển động hồi chuyển và các con cù

Một kiểu chuyển động khác lạ và hấp dẫn có thể bạn đã biết là con cù quay quanh trục đối xứng của nó như trên hình 11.13a. Nếu con cù quay nhanh, trục đối xứng của nó quay quanh trục z, vẽ ra một hình nón, (Hình 11.13b). Chuyển động của trục đối xứng xung quanh trục thẳng đứng, được biết tới như là **chuyển động tiến động**, thường là chậm so với chuyển động quay của con cù.

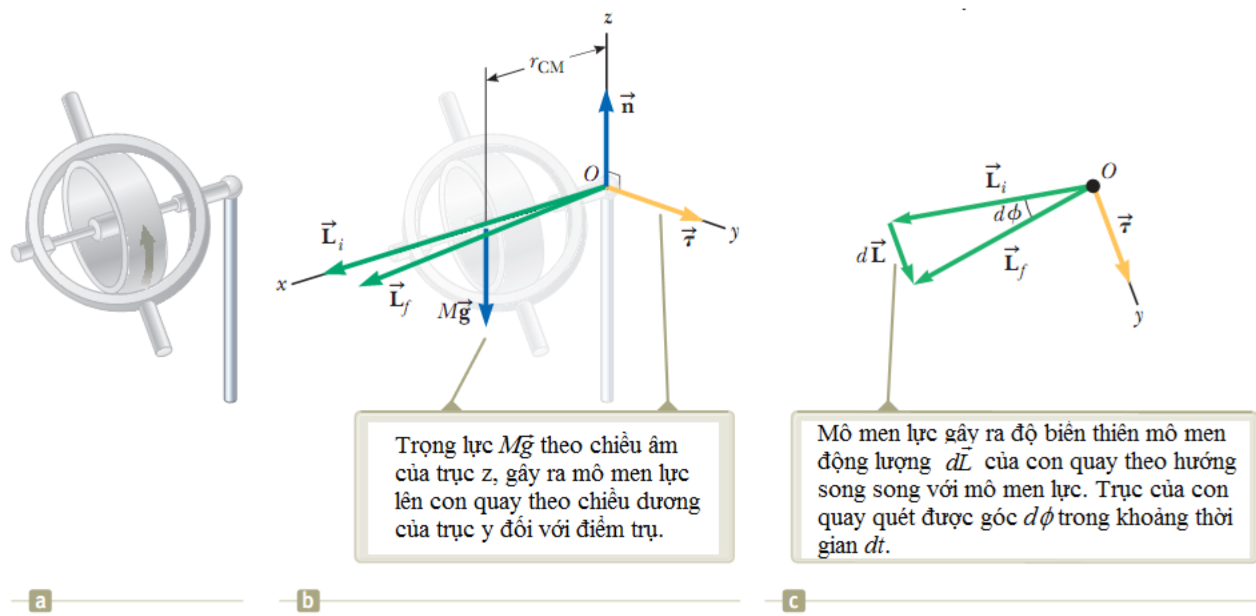


Hình 11.13. Chuyển động tiến động của con cù quay quanh trục đối xứng của nó. a) Các ngoại lực tác dụng lên con cù chỉ là phản lực pháp tuyến $\vec{n}$ và trọng lực $M\vec{g}$. Hướng của mômen động lượng $\vec{L}$ dọc theo trục đối xứng. b) Vì $\vec{L}_f = \Delta\vec{L} + \vec{L}_i$ nên con cù tiến động quanh trục z.

Câu hỏi nảy sinh một cách tự nhiên ở đây là tại sao con cù không bị đổ xuống. Vì khối tâm của nó không ở ngay trên điểm trụ O, nên có một mômen lực tác dụng lên con cù đối với trục quay đi qua O, mômen lực này gây bởi trọng lực $M\vec{g}$. Con cù sẽ đổ xuống nếu như nó không quay. Tuy nhiên vì nó quay, nên nó có một mômen động lượng $\vec{L}$ hướng dọc theo trục đối xứng của nó. Ta sẽ chỉ ra rằng trục đối xứng này chuyển động xung quanh trục z (xảy ra chuyển động tiến động) vì mômen lực làm cho hướng của trục đối xứng thay đổi. Sự minh họa này là một ví dụ tuyệt vời về tầm quan trọng của bản chất véctơ của mômen động lượng.

$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

Biểu thức này chỉ ra rằng trong khoảng thời gian vô cùng nhỏ dt, mômen lực gây ra một độ biến thiên mômen động lượng $d\vec{L}$, cùng hướng với $\vec{\tau}$. Do đó, giống như véctơ mômen lực, $d\vec{L}$ cũng phải vuông góc với $\vec{L}$. Hình 11.14c minh họa chuyển động tiến động của trục đối xứng của con quay. Trong khoảng thời gian dt, độ biến thiên mômen động lượng là $d\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \vec{\tau} dt$. Vì $d\vec{L}$ vuông góc với $\vec{L}$, nên độ lớn của $\vec{L}$ không thay đổi, $\left|\vec{L}_f\right| = \left|\vec{L}_i\right|$. Hơn nữa, sự thay đổi chỉ là hướng của $\vec{L}$. Vì sự thay đổi mômen động lượng $d\vec{L}$ là theo hướng của $\vec{\tau}$, nằm trong mặt phẳng xy, nên con quay hồi chuyển chịu chuyển động tiến động.



Hình 11.14. a) Một con quay hồi chuyển được đặt trên một cái trụ ở đầu mút bên phải. b) Giản đồ đối với con quay chỉ ra các lực, mômen lực và mômen động lượng. c) Nhìn từ trên xuống (dọc theo trục z) các vectơ mômen động lượng của con quay tại thời điểm đầu và cuối của khoảng thời gian rất ngắn dt.

Để đơn giản hóa sự mô tả hệ, giả sử mômen động lượng toàn phần của bánh xe tiến động là tổng của mômen động lượng $I\vec{\omega}$ do quay và mômen động lượng do chuyển động của khối tâm so với trục đứng. Trong cách xử lý này, ta bỏ qua phần đóng góp của chuyển động của khối tâm và lấy mômen động lượng toàn phần chỉ là $I\vec{\omega}$. Trong thực hành, sự xấp xỉ này là tốt khi $\vec{\omega}$ lớn.

Giản đồ véctơ trên hình 11.14c cho thấy rằng trong khoảng thời gian dt, véctơ mômen động lượng quay được một góc $d\phi$, cũng là góc mà con quay hồi chuyển quay được. Từ tam giác véctơ tạo bởi $\vec{L}_i, \vec{L}_f, d\vec{L}$ ta thấy rằng:

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{d\sum \tau_{ext} dt}{L} = \frac{(Mgr_{CM})}{L} dt$$

Chia cả 2 vế cho dt và dùng công thức $L = I\omega$ ta thấy rằng tốc độ trục xe quay đối với trục thẳng đứng là:

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mathrm{Mgr_{CM}}}{\mathrm{I}\omega} \tag{11.20}$$

Tần số góc ω_P gọi là **tần số tiến động**. Kết quả này chỉ đúng khi $\omega_P << \omega$. Nếu không, sẽ liên quan đến một chuyển động phức tạp hơn nhiều. Như bạn có thể thấy từ phương trình (11.20), điều kiện $\omega_P << \omega$ thỏa mãn khi ω rất lớn, tức là khi bánh xe quay rất nhanh. Hơn nữa, chú ý rằng tần số tiến động suy giảm khi ω tăng, tức là khi bánh xe quay càng nhanh quanh trục đối xứng của nó.

Một ví dụ về con quay hồi chuyển, giả sử bạn đang ở trên một con tàu vũ trụ trong không gian xa xôi, và bạn cần thay đổi quỹ đạo của tàu. Để lái động cơ chạy đúng hướng, bạn cần phải xoay tàu vũ trụ. Tuy nhiên, làm thế nào để bạn xoay con tàu vũ trụ trong không gian trống rỗng? Cách thứ nhất là phải có các động cơ tên lửa nhỏ bắn ra vuông góc với tàu, cung cấp một mômen lực đối với khối tâm của tàu. Một cơ cấu như vậy là đáng mong muốn, và nhiều tàu vũ trụ có các tên lửa như vậy.

Hình 11.15. a) Tàu vũ trụ mang theo một con quay đang đứng yên chưa quay. *b) Con quay được điều khiển cho quay.*

Tuy nhiên, ta hãy khảo sát phương pháp khác liên quan tới mômen động lượng, và không đòi hỏi tiêu thụ nhiên liệu tên lửa. Giả sử tàu vũ trụ mang một con quay hồi chuyển không quay như trên hình 11.15a. Trong trường hợp này, mômen động lượng của tàu vũ trụ đối với khối tâm của nó bằng không. Giả sử con quay được làm cho quay, cung cấp cho nó một mômen động lượng khác không. Không có mômen ngoại lực tác dụng lên hệ cô lập (tàu vũ trụ-con quay), cho nên mômen động lượng của hệ này phải bằng không theo mô hình hệ cô lập (mômen động lượng). Mômen động lượng của hệ bằng không nếu tàu vũ trụ quay theo chiều ngược với chiều quay của con quay sao cho véc tơ mômen động lượng của tàu và của con quay khử lẫn nhau. Kết quả của việc làm cho con quay quay như trên hình 11.15b là tàu quay vòng. Bằng cách bố trí ba con quay theo ba trục vuông góc với nhau, có thể thu được sự quay mong muốn trong không gian.

Hiệu ứng này tạo ra một tình huống không mong muốn đối với tàu Voyager 2 trong chuyến bay của nó. Tàu này đã mang một máy ghi âm (dùng băng) mà phần guồng (ống) của nó quay ở tốc độ rất cao. Mỗi lần máy thu băng được bật lên, guồng tác dụng như một con quay hồi chuyển và tàu bị quay theo hướng ngược lại. Sự quay này đã được Trung tâm điều khiển tàu (Mission Control) dùng các vòi phun bắn về một phía để dừng sự quay.

Câu hỏi 11.1: Cho hai quả cầu đặc và rỗng cùng khối lượng và bán kính. Chúng chuyển động quay cùng tốc độ góc. Hỏi quả cầu nào có mômen động lượng lớn hơn:
(a) Quả cầu đặc.
(b) Quả cầu rỗng.
(c) Bằng nhau.
(d) Không thể xác định.

Câu hỏi 11.2: Một người thợ lặn lao ra từ tàu xuống nước với cơ thể duỗi thẳng và quay chậm. Hỏi động năng quay của cô ấy sẽ như thế nào:
(a) Tăng lên.
(b) Giảm đi.
(c) Không đổi.
(d) Không thể xác định.

Tóm tắt chương 11

Định nghĩa

Cho trước hai vectơ $\vec{A}$ và $\vec{B}$, tích vectơ $\vec{A} \times \vec{B}$ là một vectơ $\vec{C}$ có độ lớn

$$C = AB\sin\theta \quad (11.3)$$

trong đó θ là góc giữa hai vectơ $\vec{A}$ và $\vec{B}$. Hướng của vectơ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi $\vec{A}$ và $\vec{B}$, và hướng này được xác định bằng quy tắc bàn tay phải.

Vectơ mômen lực $\vec{\tau}$ gây bởi lực $\vec{F}$ đối với một trục quay đi qua gốc O trong hệ quy chiếu quán tính được định nghĩa là

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (11.1)$$

Mômen động lượng $\vec{L}$ đối với một trục quay đi qua gốc O của chất điểm có động lượng $\vec{p} = m\vec{v}$ là

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \quad (11.10)$$

trong đó $\vec{r}$ là véc tơ vị trí của chất điểm so với gốc O.

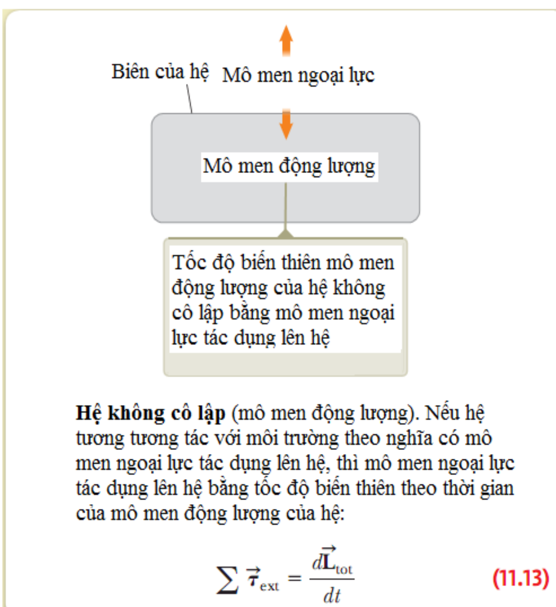
Khái niệm và nguyên lý

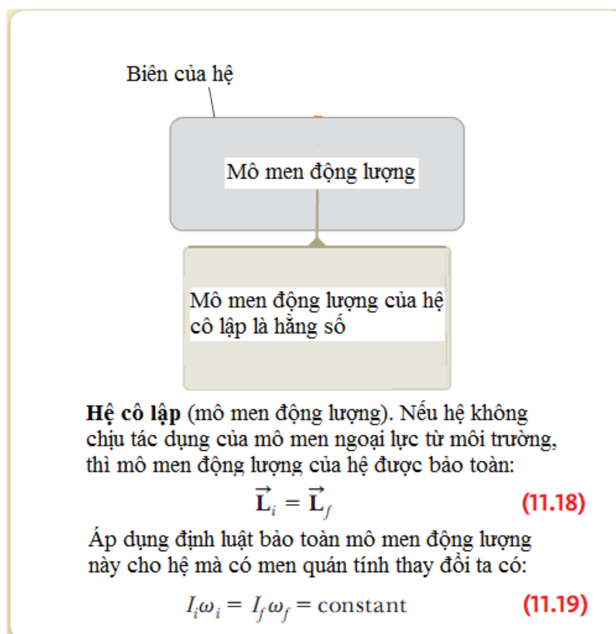
Thành phần z của mômen động lượng của một vật rắn đang quay đối với một trục z cố định là

$$L_z = I\omega \quad (11.14)$$

trong đó I là mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay và ω là tốc độ góc của nó.

Mô hình phân tích để giải bài toán





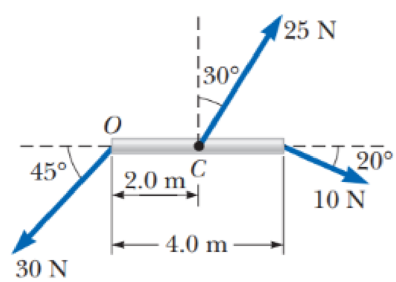
Câu hỏi lý thuyết chương 11

1. Nguồn gốc các ngôi sao là khối khí lớn quay chậm. Trọng lực làm các khối khí này co lại, giảm kích thước. Tốc độ góc của nó thay đổi như thế nào khi nó co lại? Giải thích.
2. Tại sao với một cây sào dài giúp người đi trên dây giữ được thăng bằng?
3. Trong các cuộc đua mô tô, các tay đua lao qua các con dốc nhỏ và lúc đó mô tô lao trong không khí trong một thời gian ngắn. Nếu tay đua vẫn rồ ga tăng tốc khi vừa rời khỏi dốc và bay trong không khí, xe máy có xu hướng hướng mũi lên trên. Tại sao?
4. Nếu tình trạng Trái đất ấm lên toàn cầu vẫn diễn ra 100 năm tiếp theo, nó sẽ làm băng ở hai cực Trái đất tan chảy và nước sẽ phân bố ở gần xích đạo hơn.

   (a) Điều đó làm thay đổi mômen quá tính của Trái đất như thế nào?
   (b) Thời gian của một ngày (thời gian Trái đất quay vòng) giảm hay tăng? Giải thích.
5. Quan sát một con mèo được thả từ trên cao xuống ta thấy chân của nó luôn chạm đất trước, ngay cả khi nó được thả xuống từ tư thế nằm ngửa bụng. Các đoạn phim quay chậm cho thấy trong quá trình rơi xuống, con mèo đã xoay nửa người phía trước của nó theo một hướng và xoay nửa người phía sau của nó theo hướng ngược lại (các hình từ trái sang phải bên dưới). Dựa vào định luật bảo toàn mômen động lượng, hãy giải thích các động tác đó của con mèo.

Bài tập chương 11

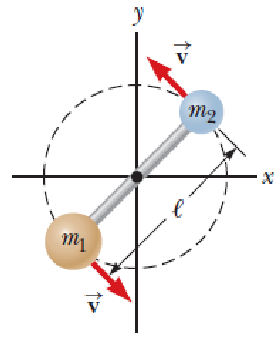
1. Tính tổng mômen lực (phương, chiều và độ lớn) tác dụng lên thanh như hình đối với trục vuông góc với mặt phẳng giấy và



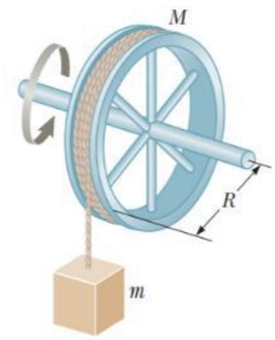
   (a) Đi qua điểm O.
   (b) Đi qua điểm C.
2. Một chất điểm có vị trí được biểu diễn bằng hàm vectơ vị trí $\vec{r} = (4.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath})$ m, và lực tác dụng lên nó đươc cho bởi phương trình $\vec{F} = (3.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath})$ N .

   (a) Tính mômen lực tác dụng lên chất điểm đối với gốc O.
   (b) Có điểm nào khác mà momen xoắn của lực F như trên đối với điểm đó ngược chiều và có độ lớn bằng một nửa mômen lực đối với điểm O?
   (c) Có thể có nhiều hơn một điểm như vậy không?
   (d) Có thể có 1 điểm như vậy nằm trên trục Oy không?
   (e) Có thể có nhiều hơn một điểm như vậy nằm trên trục Oy hay không?
   (f) Xác định vectơ vị trí của một điểm.

3. Cho hệ gồm: một thanh nhẹ, mảnh có chiều dài l = 1m, hai vật (xem như chất điểm) được gắn hai đầu thanh. Hạt một khối lượng $m_1 = 4\,kg$ và vật hai khối lượng $m_2 = 3\,kg$. Hệ quay quanh tâm, trong mặt phẳng xy (như hình). Tính momen động lượng của hệ so với gốc biết tốc độ của mỗi hạt là 5,00 m / s.



4. Một vật nặng có m = 2kg được gắn vào đầu của một sợi dây quấn quanh ròng rọc như hình vẽ. Ròng rọc là một vành tròn bán kính R = 8cm và khối lượng M = 2 kg. Các nan hoa có khối lượng không đáng kể.



(a) Tính tổng mômen lực đối với trục ròng rọc.
(b) Khi vật chuyển động với tốc độ v thì ròng rọc quay với tốc độ góc $= \frac{v}{R}$. Xác định tổng mômen động lượng của hệ đối với trục ròng rọc theo v.
(c) Sử dụng kết quả câu a và $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ để tính gia tốc của ròng rọc.

5. Một hạt 5.00kg bắt đầu chuyển động từ gốc tại t = 0. Vận tốc cho bởi phương trình:

$$\vec{v} = (6t^2\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath})$$

Với $\vec{v}$ tính bằng m/s và t tính bằng s.

(a) Tìm vị trí của nó theo thời gian.
(b) Mô tả chuyển động của nó.
(c) Tính gia tốc theo thời gian
(d) Tính tổng ngoại lực tác động lên hạt theo thời gian,
(e) Tính tổng momen ngoại lực so với gốc tác động lên hạt theo thời gian,
(f) Tính mômen động lượng so với gốc theo thời gian
(g) Tính động năng của hạt theo thời gian,
(h) Tính công suất truyền cho hạt theo thời gian.

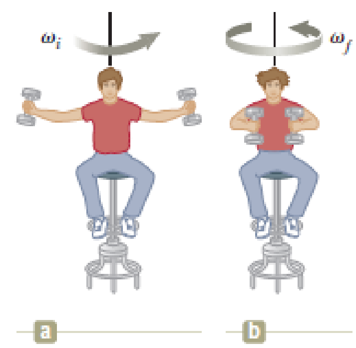
6. Một đĩa khối lượng đồng nhất m = 3,00 kg và bán kính r = 0,200 m quay quanh một trục cố định vuông góc với đĩa với tần số góc 6,00 rad / s. Tính độ lớn mômen động lượng của đĩa khi trục quay

(a) Đi qua khối tâm của đĩa
(b) Đi qua một điểm giữa khối tâm và vành đĩa.

7. Khoảng cách giữa tâm của hai bánh xe của một xe máy là 155 cm. Khối tâm của xe máy, kể cả người lái nằm trên mặt đất 88 cm và ở giữa 2 bánh xe. Giả sử khối lượng của mỗi bánh xe không đáng kể so với người lái và xe. Động cơ chỉ lái bánh sau. Hỏi giá trị gia tốc theo phương ngang nào của xe máy sẽ làm bánh xe trước văng lên khỏi mặt đất.

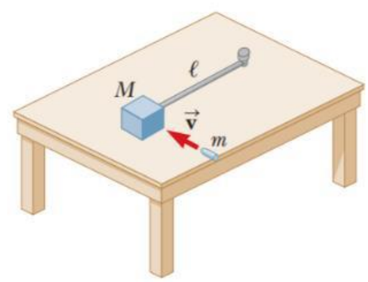
8. Một bàn xoay bán kính R = 2,00 m có mômen quán tính I = 250 kgm^2 và quay không có ma sát ở tốc độ 10,0 vòng / phút theo một trục vuông góc với nó. Một đứa trẻ nặng 25,0 kg nhảy lên vòng xoay và ngồi xuống cạnh vòng xoay. Tìm tốc độ góc mới của vòng xoay?

9. Một học sinh ngồi trên một chiếc ghế xoay tự do cầm hai quả tạ, mỗi chiếc có khối lượng 3,00 kg (như hình). Khi dang tay ra theo chiều ngang (hình a), tạ cách trục quay là 1.00 m và học sinh quay với tốc độ góc là 0,750 rad / s. Tổng momen quán tính của ghế xoay và học sinh đối với trục quay là 3,00 kg.m^2 và được xem như không đổi. Học sinh co tay lại theo chiều ngang tới vị trí quả tạ cách trục xoay 0,300 m (hình b).



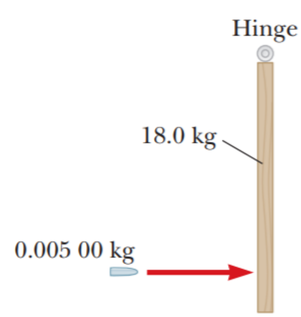
   (a) Tìm tốc độ góc mới của học sinh.
   (b) Tìm động năng quay của hệ trước và sau khi học sinh co tay.

10. Một khối gỗ có khối lượng M đăt trên bề mặt bàn nằm ngang không ma sát được gắn vào một thanh cứng có chiều dài l và khối lượng không đáng kể (hình), thanh cứng này được gắn một đầu cố định vào bàn và có thể xoay quanh đầu này. Một viên đạn chuyển động trên bề mặt mặt bàn với vận tốc v có phương vuông góc với thanh cứng đến va chạm và cắm vào khối gỗ.



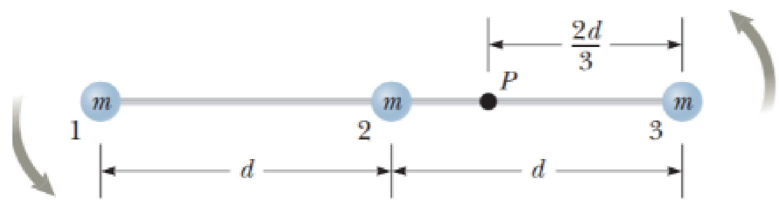
   (a) Tính mômen động lượng của hệ viên đạn – khối gỗ đối với trục quay thẳng đứng đi qua điểm cố định của thanh cứng.
   (b) Tính tỷ số phần năng lượng của viên đạn đươc chuyển hóa thành nội năng của hệ sau va chạm.

11. Một viên đạn nặng 0,005kg được bắn vào cánh cửa nặng 18kg theo phương ngang với tốc độ 103 m/s, viên đạn cắm vào cửa ở vị trí các mép dưới một đoạn 10 cm (như hình). Cánh cửa rộng 1 m và có thể xoay quanh bản lề, bỏ qua ma sát.



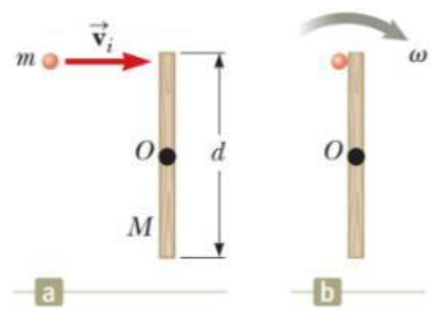
   (a) Trước khi viên đạn chạm vào cánh cửa nó có mômen động lượng so với trục quay của cánh cửa hay không?
   (b) Nếu có hãy tính giá trị của mômen động lượng này, nếu không hãy giải thích.
   (c) Cơ năng của hệ viên đạn – cánh cửa có bảo toàn trong suốt quá trình va chạm không?
   (d) Tốc độ góc của cánh cửa ngay sau khi va chạm là bao nhiêu?
   (e) Tính tổng năng lượng của hệ viên đạn – cánh cửa sau va chạm và xác định xem nó ít hơn hay bằng với động năng của viên đạn trước khi va chạm.

12. Ba vật có khối lượng bằng nhau được gắn với một thanh cứng không có khối lượng như hình. Thanh cứng đang nằm ngang, đứng yên thì bắt đầu xoay tự do trong mặt phẳng thẳng đứng với trục quay đi qua điểm P. Giả sử m và d đã biết, hãy tìm



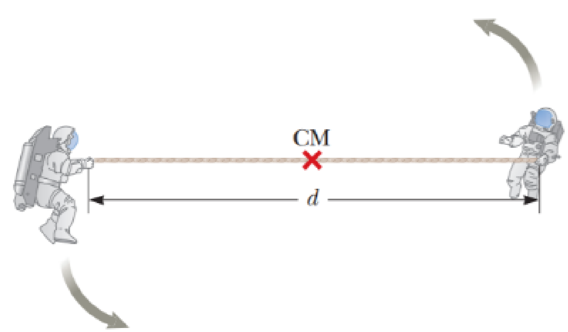
(a) Mômen quán tính của 3 vật này đối với trục quay qua P,
(b) Mômen xoắn tác động lên hệ tại t = 0,
(c) Gia tốc góc của hệ tại t = 0,
(d) Gia tốc tiếp tuyến của vật 3 tại t = 0,
(e) Động năng cực đại của hệ,
(f) Tốc độ góc tối đa thanh đạt được,
(g) Mômen động lượng cực đại của hệ và
(h) Tốc độ cực đại của vật hai.

13. Bắn một viên đạn có khối lượng m với tốc độ v_i về phía phải (như hình a) và đâm vào đầu thanh sắt cố định có khối lượng M, chiều dài d, xoay quanh trục không ma sát vuông góc với mặt phẳng hình vẽ qua O (như hình). Chúng ta muốn xác định được tỷ số động năng thay đổi trong hệ do va chạm.



(a) Mô hình phân tích nào thích hợp để mô tả chuyển động của viên đạn và thanh sắt?
(b) Xác định mômen động lượng của hệ trước va chạm đối với trục quay qua O?
(c) Mômen quán tính của hệ đối với trục qua O sau khi m cắm vào thanh.
(d) Nếu tốc độ góc của hệ thống sau va chạm là ω, xác định mômen động lượng của hệ sau va chạm.
(e) Tính tốc độ góc ω sau va chạm,
(f) Tính động năng của cơ hệ trước khi va chạm và
(g) Tính động năng của cơ hệ sau va chạm.
(h) Tính tỷ số động năng trước và sau va chạm.

14. Hai phi hành gia (như hình), mỗi người có khối lượng 75kg, được nối với nhau bằng một sợi dây dài 10 m và có khối lượng không đáng kể. Xem như họ cô lập trong không gian và quay quanh khối tâm của họ với tốc độ 5 m/s. Xem như các phi hành gia là các chất điểm



(a) Tính độ lớn của mômen động lượng của hệ hai phi hành gia và
(b) Tính động năng quay của hệ.

Một phi hành gia kéo sợi dây thừng để rút ngắn khoảng cách giữa hai người còn 5 m. Hãy tính

(c) Mômen động lượng mới của hệ,
(d) Tốc độ mới của phi hành gia và
(e) Động năng quay mới của hệ thống.
(f) Hóa năng dự trữ trong cơ thể của phi hành gia đã được chuyển đổi thành cơ năng của hệ khi anh ta rút ngắn sợi dây là bao nhiêu?

15. Hiện tượng nóng lên của Trái đất đang rất được quan tâm bởi vì ngay cả những thay đổi nhỏ trong nhiệt độ Trái đất có thể có những hậu quả đáng kể. Ví dụ, nếu những tảng băng ở hai cực của Trái đất tan chảy hoàn toàn, thì nước trong các đại dương nhiều lên và làm tràn ngập nhiều vùng duyên hải.

Mô hình tảng băng ở 2 cực có khối lượng 2.3×10^{19}kg và có dạng đĩa phẳng bán kính 6×10^{5}m . Giả sử các tảng băng sau khi tan chảy sẽ tạo thành lớp vỏ hình cầu là nước bao quanh Trái đất. Hỏi độ dài một ngày đêm thay đổi một lượng bao nhiêu so với hiện tại là 24 giờ/ngày? (tính theo giây và %). Cho khối lượng Trái đất là $5{,}972 \times 10^{24}$kg và bán kính Trái đất là 6371 km.