

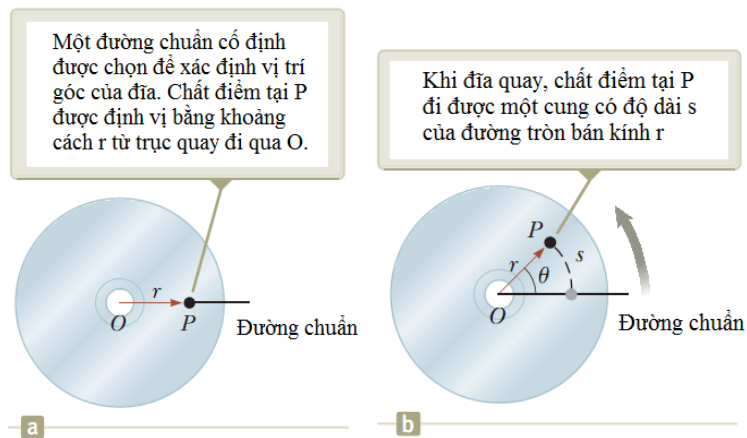
Chương 10: Vật rắn quay quanh trục cố định

Trong chương 5 ta đã xây dựng các mô hình sử dụng các định luật Newton cho chuyển động tịnh tiến của các vật được xem như chất điểm. Nhưng đối với vật đang quay, ta không thể xem nó như là chất điểm. Trong chương này ta sẽ phân tích kỹ chuyển động quay của một vật rắn, cụ thể là phân tích mô hình vật rắn quay với gia tốc góc không đổi, từ đó dẫn ra các phương trình động lực học của mô hình này. Lưu ý, vật rắn là vật không bị biến dạng, tức là vị trí tương đối của các chất điểm cấu tạo nên hệ luôn không đổi. Mọi vật thể thực tế đều bị biến dạng ở mức độ nào đó; tuy nhiên, trong các phân tích dưới đây ta bỏ qua sự biến dạng của vật.

10.1 Tọa độ góc, vận tốc góc và gia tốc góc

Hình 10.1 minh họa một đĩa CD đang quay quanh trục cố định vuông góc với mặt phẳng hình vẽ và đi qua tâm O của đĩa. Một yếu tố nhỏ của đĩa được mô hình hóa như một chất điểm tại P, cách gốc O một khoảng cố định r và quay quanh O theo một vòng tròn bán kính r.

Ta biểu diễn vị trí của P theo tọa độ cực (r, θ), với r là khoảng cách từ gốc tọa độ tới P, θ là góc quay ngược chiều kim đồng hồ từ một đường cố định được chọn làm mốc (đường chuẩn) như trên hình 10.1. Góc θ thay đổi theo thời gian, còn r không thay đổi. Khi chất điểm chuyển động dọc theo đường tròn bắt đầu từ đường chuẩn (θ = 0), nó chuyển động qua một cung có độ dài s như trên hình 10.1b. Ta có:



Hình 10.1 Một đĩa compact quay quanh trục cố định qua O và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ

$$s = r\theta \tag{10.1a}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{10.1b}$$

Vì θ là tỉ số giữa độ dài của cung và bán kính của đường tròn nên nó là một số thuần túy (không có đơn vị). Tuy nhiên, ta thường cho đơn vị (già) của θ là radian (rad).

Tọa độ góc θ: Vì đĩa là một vật rắn nên khi chất điểm tại P chuyển động quét qua một góc θ tính từ đường chuẩn thì mỗi yếu tố khác của vật cũng quay và quét qua một góc θ. Nên ta có thể liên kết góc θ với toàn bộ vật, cũng như liên kết với từng chất điểm riêng biệt, cho phép xác định tọa độ góc của vật rắn trong chuyển động quay. Chọn một đường chuẩn trên vật thì *tọa độ góc của vật rắn là góc θ giữa đường chuẩn này và một đường chuẩn cố định*

khác (thường là trục x). Tọa độ góc θ trong chuyển động quay đóng vai trò tương tự như vị trí x trong chuyển động tịnh tiến.

Khi chất điểm đang xét chuyển động từ vị trí A tới vị trí B trong khoảng thời gian Δt như trên hình 10.2, đường chuẩn gắn với vật quét được một góc $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Đại lượng $\Delta\theta$ này được gọi là **độ dời góc** của vật rắn:

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

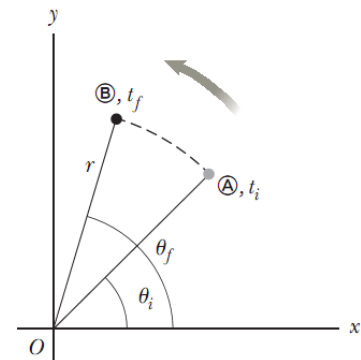
Nếu vật rắn quay nhanh, độ dời này diễn ra trong một khoảng thời gian ngắn. Nếu vật rắn quay chậm, độ dời này diễn ra trong một khoảng thời gian dài hơn. Các tốc độ quay khác nhau được định lượng bởi khái niệm tốc độ góc trung bình ω_{avg} , là tỉ số giữa độ dời góc của vật rắn và khoảng thời gian Δt diễn ra độ dời đó:

$$\omega_{avg} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (10.2)$$

Tốc độ góc tức thời ω được xác định bằng giới hạn của tốc độ góc trung bình khi $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (10.3)$$

Đơn vị tốc độ góc là rad/s, có thể viết là s^{-1} vì rad không có thứ nguyên. ω dương khi θ tăng (chuyển động cùng chiều kim đồng hồ), ω âm khi θ giảm (chuyển động ngược chiều kim đồng hồ).



Hình 10.2 Chất điểm trên vật rắn quay từ (A) tới (B) dọc theo cung tròn. Trong khoảng $\Delta t = t_f - t_i$, r quét qua một góc

Câu hỏi 10.1: Một vật rắn quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục cố định. Mỗi cặp số liệu sau đây biểu thị tọa độ góc ban đầu và tọa độ góc cuối cùng của vật. (i) Cặp số liệu nào chỉ xảy ra nếu vật quay một góc lớn hơn 180° ? (a) 3 rad, 6 rad (b) -1 rad, 1 rad (c) 1 rad, 5 rad (ii) Giả sử độ biến thiên tọa độ góc của mỗi cặp giá trị này xảy ra trong 1 s. Cặp số liệu nào biểu thị tốc độ góc trung bình nhỏ nhất?

Nếu tốc độ góc tức thời của vật rắn thay đổi từ ω_i đến ω_f trong khoảng Δt thì vật sẽ có gia tốc góc. Gia tốc góc trung bình α_{avg} của vật rắn quay được xác định bằng tỉ số giữa độ biến thiên tốc độ góc và khoảng thời gian Δt :

$$\alpha_{avg} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (10.4)$$

Gia tốc góc tức thời α được xác định bởi giới hạn của gia tốc góc trung bình khi $\Delta t \rightarrow 0$:

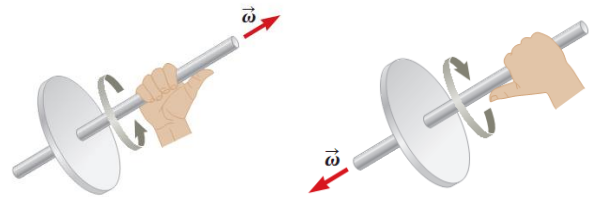
$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (10.5)$$

Gia tốc góc có đơn vị là rad/s^2 , hoặc là s^{-2} . α dương khi vật rắn quay ngược chiều kim đồng hồ nhanh dần hoặc khi vật rắn quay cùng chiều kim đồng hồ chậm dần.

Tóm lại:

- Khi vật rắn quay quanh trục cố định, mọi chất điểm của vật rắn quay được cùng một góc, và có cùng tốc độ góc, gia tốc góc. Do đó, giống như tọa độ góc θ , các đại lượng ω và α đặc trưng cho chuyển động quay của toàn vật rắn cũng như của từng chất điểm riêng biệt của vật rắn.
- Tọa độ góc θ , tốc độ góc ω và gia tốc góc α tương tự như vị trí dài x , tốc độ dài v và gia tốc dài a .

Vector vận tốc góc và vector gia tốc góc: Các đại lượng ω và α tương ứng là độ lớn của vector vận tốc góc $\vec{\omega}$ và vector gia tốc góc $\vec{\alpha}$. Vì ta xét sự quay quanh trục cố định nên ta có thể không dùng các kí hiệu vector trong các phương trình 10.3 và 10.5 mà dùng cách gán dấu dương hoặc âm cho ω và α để biểu thị hướng của vector. Hướng của $\vec{\omega}$ và $\vec{\alpha}$ là hướng dọc theo trục quay và thường được xác định theo quy tắc bàn tay phải như trên hình 10.3. Khi 4 ngón tay của bàn tay phải uốn cong theo chiều quay, ngón tay cái của bàn tay phải choãi ra chỉ hướng của $\vec{\omega}$. Hướng của $\vec{\alpha}$ được xác định từ định nghĩa $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. Nó cùng hướng với $\vec{\omega}$ nếu tốc độ góc tăng theo thời gian, ngược với hướng với $\vec{\omega}$ nếu tốc độ góc giảm theo thời gian.



Hình 10.3 Quy tắc bàn tay phải để xác định hướng của vector vận tốc góc

10.2 Mô hình phân tích: Vật rắn quay với gia tốc góc không đổi

Khi một vật rắn quay quanh trục cố định với gia tốc góc không đổi, ta dùng một mô hình phân tích gọi là mô hình vật rắn chịu gia tốc góc không đổi. Mô hình này tương tự như mô hình chất điểm quay với gia tốc góc không đổi.

Thiết lập các công thức động học cho mô hình "Vật rắn quay với gia tốc góc không đổi":

Viết phương trình (10.5) dưới dạng $d\omega = \alpha dt$ và lấy tích phân từ $t_i = 0$ tới $t_f = t$ ta được:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \tag{10.6}$$

trong đó ω_i là tốc độ góc ở thời điểm $t=0$. Phương trình 10.6 cho phép tính ω_f của vật tại thời điểm t bất kì sau đó. Thay phương trình 10.6 vào phương trình 10.3 và lấy tích phân lần nữa ta được:

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \tag{10.7}$$

Trong đó θ_i là vị trí góc ở thời điểm $t=0$. Phương trình (10.7) cho phép tính θ_f của vật tại thời điểm t bất kì sau đó. Khử t trong các phương trình (10.6) và (10.7) ta được:

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \tag{10.8}$$

Phương trình (10.8) cho phép tính ω_f của vật rắn đối với giá trị θ_f bất kì. Khử α trong các phương trình (10.6) và (10.7) ta được:

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad (10.9)$$

Các biểu thức động học đối với vật rắn quay với gia tốc góc không đổi này có cùng dạng toán học với các biểu thức động học của chất điểm quay với gia tốc góc không đổi (Chương 2). Chúng có thể thu được từ các phương trình của chuyển động tịnh tiến bằng cách thay $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$, $a \rightarrow \alpha$. Bảng 10.1 so sánh các phương trình động học giữa chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay.

Bảng 10.1: Các phương trình động học của chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay

Vật rắn quay với gia tốc góc không đổi	Chất điểm quay với gia tốc góc không đổi
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Câu hỏi 10.2: Hãy xét lại các cặp tọa độ góc của vật rắn trong Câu hỏi 10.1. Trong cả ba trường hợp, nếu vật đang đứng yên ở tọa độ góc ban đầu, sau đó quay ngược chiều kim đồng hồ với gia tốc góc không đổi đến tọa độ góc cuối cùng với cùng tốc độ góc, trường hợp nào gia tốc góc lớn nhất?

Bài tập mẫu 10.1: Bánh xe quay

Một bánh xe đang quay với gia tốc góc không đổi bằng 3,50 rad/s². (A) Nếu tốc độ góc của bánh xe là 2,00 rad/s tại thời điểm ban đầu $t_i = 0$, hỏi sau 2 s độ dời góc của bánh xe bằng bao nhiêu? (B) Bánh xe quay được bao nhiêu vòng trong khoảng thời gian này? (C) Tốc độ góc của bánh xe tại $t = 2,00$ s bằng bao nhiêu?

Giải:

(A) Từ phương trình (10.7) ta tính được độ dời góc của bánh xe:

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Thay số ta được:

$$\Delta\theta = (2 \text{ rad/s})(2 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3,50 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s})^2 = 11 \text{ rad} = 630^\circ$$

(B) Từ độ dời góc ở câu (A) ta tính ra được số vòng:

$$n = \frac{630^\circ}{360^\circ} = 1,75 \text{ (vòng)}$$

(C) Từ phương trình (10.6) và thay số ta có:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 9 \text{ (rad/s)}$$

10.3 Các đại lượng góc và các đại lượng dài (tịnh tiến)

Trong mục này ta rút ra một vài mối liên hệ giữa tốc độ góc và gia tốc góc của một vật rắn quay và tốc độ dài và gia tốc dài của một điểm trên vật. Nhớ rằng khi vật rắn quay quanh trục cố định như trên hình 10.4, các chất điểm của vật chuyển động dọc theo các đường tròn có tâm nằm trên trục quay.

Vì điểm P trên hình 10.4 chuyển động trên một đường tròn, **vector vận tốc dài** \vec{v} luôn tiếp tuyến với đường tròn và do đó được gọi là **vận tốc tiếp tuyến**. Độ lớn của vận tốc tiếp tuyến của điểm P theo định nghĩa là **tốc độ tiếp tuyến** $v = ds/dt$, trong đó s là quãng đường mà điểm P đi được dọc theo đường tròn.

Vì $s = r\theta$ (phương trình 10.1a) và r là hằng số, ta thu được:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

Vì $d\theta/dt = \omega$ (phương trình 10.3) nên suy ra:

$$v = r\omega \tag{10.10}$$

Tức là tốc độ tiếp tuyến của mỗi điểm trên vật rắn đang quay bằng khoảng cách từ trục quay đến điểm đó nhân với tốc độ góc. Do đó, mặc dù các điểm trên vật rắn có cùng tốc độ góc nhưng không phải mọi điểm của vật rắn đều có cùng tốc độ tiếp tuyến, vì r không như nhau với tất cả các điểm của vật rắn.

Phương trình 10.10 chỉ ra rằng tốc độ tiếp tuyến của một điểm trên vật rắn đang quay tăng lên khi ra xa trục quay. Ví dụ, đầu cây gậy đánh gôn chuyển động nhanh hơn nhiều so với tay cầm.

Ta liên hệ gia tốc góc của một vật rắn đang quay với gia tốc tiếp tuyến của điểm P bằng cách lấy đạo hàm của v theo thời gian:

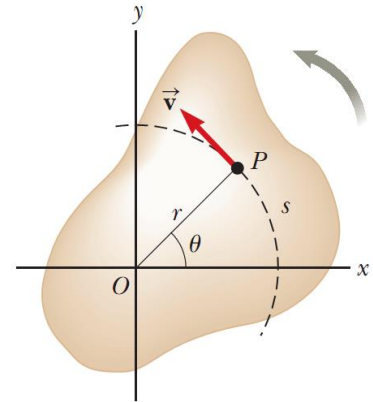
$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha \tag{10.11}$$

Tức là thành phần tiếp tuyến của gia tốc dài của một điểm trên vật rắn đang quay bằng khoảng cách từ trục quay đến điểm đó nhân với gia tốc góc.

Vì $v = r\omega$ đối với một điểm P trên vật rắn quay, ta có thể biểu diễn gia tốc hướng tâm tại điểm đó dưới dạng tốc độ góc như là:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{10.12}$$



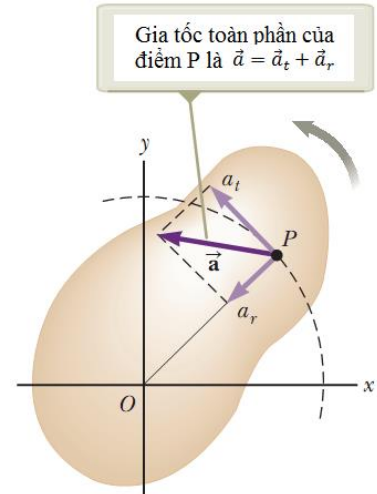
Hình 10.4 Khi vật rắn quay quanh trục cố định đi qua O (trục z), điểm P có vận tốc tiếp tuyến \vec{v} luôn tiếp tuyến với đường tròn bán kính r.

Vector gia tốc toàn phần (biểu diễn như trên hình 10.5) tại điểm đó là $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$, trong đó độ lớn của \vec{a}_r là gia tốc hướng tâm a_c . Vì \vec{a} là một vector có thành phần tiếp tuyến và thành phần pháp tuyến, nên độ lớn của \vec{a} tại điểm P trên vật rắn quay là:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (10.13)$$

Tóm lại:

- Nên chú ý rằng, đối với một vật rắn quay quanh một trục cố định, các chất điểm trên vật rắn sẽ có cùng tốc độ góc và gia tốc góc nhưng vận tốc dài và gia tốc dài thì khác nhau.
- Các phương trình 10.10, 10.11 và 10.12 biểu diễn mối liên hệ giữa đại lượng góc và đại lượng dài



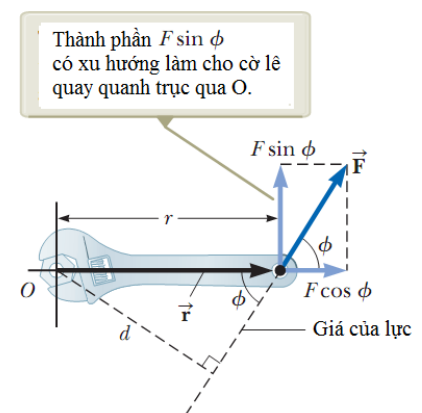
Hình 10.5 Khi vật rắn quay quanh một trục cố định đi qua điểm O (trục z), điểm P có các thành phần tiếp tuyến và hướng tâm của gia tốc dài, a_t và a_r

Câu hỏi 10.3: Ethan và Joseph đang chơi trò ngồi trên vòng quay. Ethan cưỡi con ngựa ở mép ngoài của bộ sàn tròn, Joseph cưỡi con ngựa ở phía trong gần trục quay hơn. Khoảng cách từ trục quay đến Ethan gấp đôi khoảng cách từ trục quay đến Joseph (i) Khi vòng quay quay với tốc độ góc không đổi, hỏi tốc độ góc của Ethan so với tốc độ góc của Joseph là: (a) gấp hai lần (b) bằng nhau (c) bằng một nửa (d) không thể xác định được (ii) Khi vòng quay quay với tốc độ góc không đổi, tốc độ tiếp tuyến của Ethan so với tốc độ tiếp tuyến của Joseph là: (a) gấp hai lần (b) bằng nhau (c) bằng một nửa (d) không thể xác định được.

10.4 Mômen lực

Khi nghiên cứu chuyển động tịnh tiến, ta đã biết rằng nguyên nhân của sự thay đổi trạng thái chuyển động là lực. Bây giờ ta tìm hiểu nguyên nhân gây ra sự thay đổi trạng thái chuyển động trong chuyển động quay. Hình dung bạn đang cố gắng quay một cánh cửa bằng cách tác dụng một lực có độ lớn F theo hướng vuông góc với bề mặt của cánh cửa gần với bản lề rồi sau đó tại các khoảng cách khác nhau tính từ bản lề. Bạn thấy cánh cửa quay nhanh hơn khi tác dụng lực gần núm cửa hơn là khi tác dụng lực gần bản lề.

Khi một lực tác dụng lên một vật rắn được gắn vào một trục quay cố định, vật rắn có xu hướng quay quanh trục đó. Xu hướng làm vật quay quanh trục của một lực được đo bằng đại lượng gọi là mômen lực $\vec{\tau}$. **Mômen lực là một vectơ, nhưng ở đây ta chỉ xét độ lớn của nó.** Ta sẽ khảo sát tỉ mỉ bản chất vectơ của nó trong chương 11.



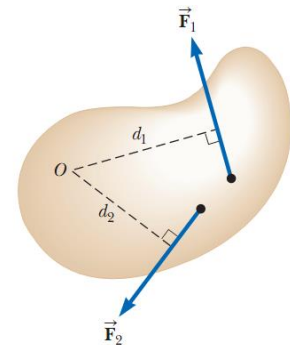
Hình 10.6 Xu hướng làm cho vật quay quanh trục của lực \vec{F} càng lớn khi F tăng và cánh tay đòn d tăng

Xét cái mở lết trên hình 10.6, ta muốn nó quay quanh trục đi qua mặt phẳng tờ giấy và đi qua tâm của cái bu lông. Lực \vec{F} tác dụng theo phương nghiêng một góc φ so với phương ngang. Ta định nghĩa độ lớn mômen của lực \vec{F} đối với trục quay đi qua O là:

$$\tau = rF \sin \varphi = Fd \quad (10.14)$$

Trong đó r là khoảng cách giữa trục quay và điểm tác dụng của lực \vec{F} , d là khoảng cách thẳng góc từ trục quay tới giá của lực \vec{F} . Từ tam giác vuông trên hình 10.7 mà mở lết là cạnh huyền, ta thấy $d = r \sin \varphi$. Đại lượng d được gọi là cánh tay đòn của lực \vec{F} .

Trên hình 10.7, thành phần của lực \vec{F} có khuynh hướng gây ra chuyển động quay của mở lết quanh trục đi qua O là $F \sin \varphi$, vuông góc với đường thẳng vẽ từ trục quay tới điểm chịu tác dụng của lực \vec{F} . Thành phần nằm ngang $F \cos \varphi$ không có xu hướng làm quay vật quanh trục đi qua O vì giá của nó đi qua O. Từ định nghĩa mômen lực, xu hướng làm quay vật tăng khi F tăng và khi d tăng, điều này giải thích vì sao cánh cửa dễ quay hơn khi ta ấn ở nắm đấm của cửa hơn là ấn ở điểm gần bản lề, và lực ấn càng gần vuông góc với cánh cửa (góc φ càng gần 90°). Ấn dọc theo một bên nắm đấm của cánh cửa $\varphi = 0$ sẽ không làm cho cánh cửa quay.



Hình 10.7 Lực \vec{F}_1 có xu hướng làm cho vật quay ngược chiều kim đồng hồ, lực \vec{F}_2 có xu hướng làm cho vật quay cùng chiều kim đồng hồ

Nếu có nhiều lực tác dụng lên một vật rắn như trên hình 10.13, mỗi lực có xu hướng gây ra sự quay quanh trục qua O. \vec{F}_2 có xu hướng làm cho vật quay cùng chiều kim đồng hồ và \vec{F}_1 có xu hướng làm cho vật quay ngược chiều kim đồng hồ. Ta dùng quy ước: dấu của mômen lực là dương nếu lực có xu hướng làm vật quay ngược chiều kim đồng hồ, là âm nếu lực có xu hướng làm vật quay cùng chiều kim đồng hồ. Trên hình 10.13, mômen của lực \vec{F}_1 có cánh tay đòn d_1 là dương và bằng $+F_1d_1$, mômen của lực \vec{F}_2 có cánh tay đòn d_2 là âm và bằng $-F_2d_2$. Do đó, tổng mômen lực đối với trục quay qua O là:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1d_1 - F_2d_2$$

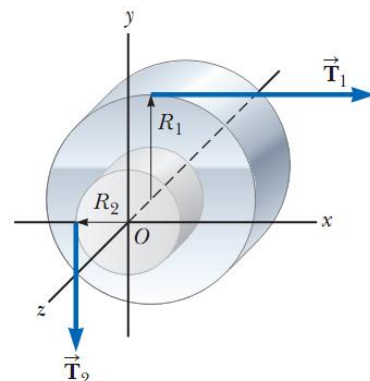
Chú ý:

- Không nên nhầm lẫn mômen lực và lực. **Các lực có thể gây ra sự thay đổi trong chuyển động quay, nhưng hiệu quả của lực trong việc gây ra sự thay đổi này phụ thuộc vào cả độ lớn của lực và cánh tay đòn của lực.** Mômen lực có đơn vị là đơn vị của lực nhân với đơn vị của độ dài, N.m trong hệ SI.
- Không được nhầm lẫn giữa mômen lực và công. Hai đại lượng này có cùng đơn vị nhưng là các khái niệm khác nhau.

Câu hỏi 10.4: (i) Nếu bạn đang tháo một cái đinh vít được bắt chặt vào một miếng gỗ bằng tuốc nơ vít và tuốc nơ vít bị hỏng, bạn nên tìm tuốc nơ vít khác có tay cầm (a) dài hơn hoặc (b) to hơn? (ii) Nếu bạn đang cố gắng tháo một cái bulông được bắt chặt vào một miếng kim loại bằng cờ lê và không thành công, bạn nên tìm một cái cờ lê khác có tay cầm (a) dài hơn hoặc (b) to hơn?

Bài tập mẫu 10.2: Mômen lực tổng hợp tác dụng lên một hình trụ

Một đoạn hình trụ có dạng như trên Hình 10.9, với phần lõi có bán kính R_2 nhô ra khỏi phần lớn hơn có bán kính R_1 . Hình trụ quay tự do quanh trục z như trên hình vẽ. Một sợi dây quấn quanh hình trụ bán kính R_1 , thực hiện một lực \vec{T}_1 hướng sang phải. Một sợi dây quấn quanh phần lõi, tác dụng một lực \vec{T}_2 hướng xuống dưới. (A) Hãy xác định mô men lực tổng hợp tác dụng lên hình trụ đối với trục quay (là trục z trên hình 10.9). (B) Giả sử $T_1 = 5,0 \text{ N}$, $R_1 = 1,0 \text{ m}$, $T_2 = 15,0 \text{ N}$, $R_2 = 0,5 \text{ m}$. Hãy xác định mô men lực tổng hợp đối với trục quay, và chiều quay của hình trụ.



Hình 10.8 Bài tập mẫu

Giải:

Phân tích. Hãy tưởng tượng rằng hình trụ trên Hình 10.9 là một trục của một cái máy. Lực \vec{T}_1 có thể được tác dụng bởi một dây đai điều khiển quấn quanh trục. Lực \vec{T}_2 có thể được tác dụng bởi một cái phanh ở bề mặt của lõi. Trong ví dụ này ta đánh giá mômen lực tổng hợp bằng cách sử dụng phương trình 10.14. Mômen lực của \vec{T}_1 đối với trục quay là $-R_1T_1$. (Dấu trừ vì mômen lực có xu hướng gây ra chuyển động quay theo chiều kim đồng hồ.) Mômen lực của \vec{T}_2 là $+R_2T_2$. (Dấu dương vì mômen lực có xu hướng gây ra chuyển động quay ngược chiều kim đồng hồ.)

(A) Mômen lực tổng hợp đối với trục quay:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = -R_1T_1 + R_2T_2$$

Kiểm tra nhanh ta thấy nếu hai lực có độ lớn bằng nhau, mômen lực tổng hợp là âm vì $R_1 > R_2$. Khi bắt đầu quay từ trạng thái đứng yên với hai lực có độ lớn bằng nhau tác dụng lên nó, hình trụ sẽ quay theo chiều kim đồng hồ vì \vec{T}_1 gây ra mômen lực lớn hơn so với \vec{T}_2 .

(B) Thay các giá trị số ta được:

$$\sum \tau = -(1,0 \text{ m})(5,0 \text{ N}) + (0,5 \text{ m})(15 \text{ N}) = 2,5 \text{ N.m}$$

Do mômen lực tổng hợp là dương nên hình trụ sẽ quay ngược chiều kim đồng hồ.

10.5 Mô hình phân tích: Vật rắn quay dưới tác dụng của mômen lực tổng hợp

Trong chương 5 ta biết rằng một hợp lực tác dụng lên vật gây ra gia tốc cho vật và gia tốc này tỉ lệ thuận với hợp lực. Đây là cơ sở của mô hình chất điểm chịu tác dụng của hợp lực, được biểu diễn theo định luật 2 Newton. Mục này sẽ chỉ ra rằng gia tốc góc của một vật rắn quay quanh trục cố định tỉ lệ thuận với tổng mômen lực đối với trục quay đó, tương tự định luật 2 Newton trong chuyển động quay.

Thiết lập phương trình động lực học cho mô hình vật rắn dưới tác dụng của mômen lực tổng hợp:

Trước tiên ta thảo luận trường hợp chất điểm chuyển động trên đường tròn quanh trục cố định dưới tác dụng của ngoại lực.

Xét chất điểm khối lượng m chuyển động trên đường tròn bán kính r dưới tác dụng của một hợp lực theo phương tiếp tuyến $\sum \vec{F}_t$ và một hợp lực theo phương pháp tuyến $\sum \vec{F}_r$ như trên hình 10.9. $\sum \vec{F}_r$ làm cho vật chuyển động trên đường tròn với một gia tốc hướng tâm. $\sum \vec{F}_t$ cung cấp cho vật gia tốc tiếp tuyến \vec{a}_t , và:

$$\sum F_t = ma_t$$

Độ lớn của mômen lực do $\sum \vec{F}_t$ tác dụng lên chất điểm chuyển động quanh trục vuông góc với mặt phẳng giấy và đi qua tâm đường tròn là:

$$\sum \tau = \sum F_t r = ma_t r$$

Vì gia tốc tiếp tuyến liên hệ với gia tốc góc theo công thức $a_t = r\alpha$ (phương trình 10.11), nên mômen lực có thể viết là:

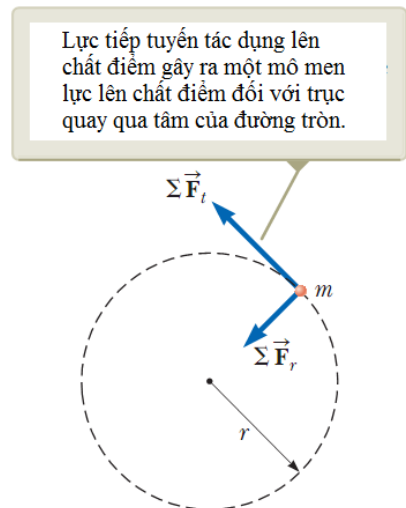
$$\sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha \tag{10.15}$$

Ta đặt $mr^2 = I$ nên:

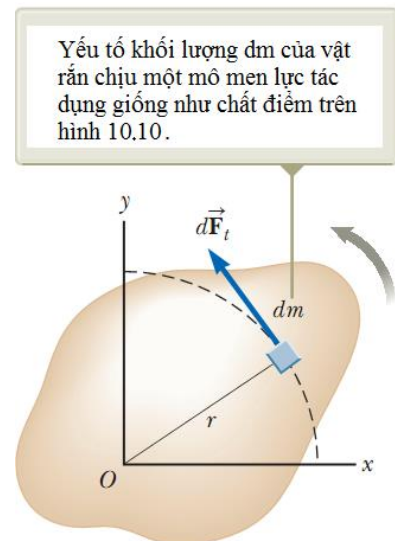
$$\sum \tau = I\alpha \tag{10.16}$$

Tức là tổng mômen lực tác dụng lên chất điểm tỉ lệ thuận với gia tốc góc của nó. Chú ý là $\sum \tau = I\alpha$ có cùng dạng toán học như định luật 2 Newton $\sum F = ma$.

Tiếp theo ta mở rộng thảo luận này cho một vật rắn có dạng bất kì quay quanh trục cố định như trên hình 10.10. Có thể xem



Hình 10.9 Chất điểm chuyển động trên đường tròn dưới tác dụng của lực tiếp tuyến $\sum \vec{F}_t$. Lực pháp tuyến $\sum \vec{F}_r$ cũng phải có mặt để duy trì chuyển động tròn.



Hình 10.10 Chất điểm quay quanh trục đi qua O. Mỗi yếu tố khối lượng dm quay quanh trục với gia tốc góc α

vật rắn là tập hợp vô hạn các phần tử khối lượng m_i có kích thước vô cùng nhỏ. Nếu ta đặt một hệ tọa độ Đề-các lên vật thì mỗi phần tử khối lượng quay trên một đường tròn quanh gốc tọa độ và có một gia tốc tiếp tuyến \vec{a}_i gây bởi ngoại lực tiếp tuyến \vec{F}_i . Đối với mỗi phần tử, từ định luật 2 Newton ta có:

$$F_i = m_i \cdot a_i$$

Mômen ngoại lực $\vec{\tau}_i$ liên quan tới lực tác dụng \vec{F}_i có độ lớn:

$$\tau_i = r_i F_i = r_i m_i a_i$$

Vì $a_i = r_i \alpha$ nên:

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Mặc dù mỗi phần tử khối lượng của vật rắn có thể có một gia tốc tịnh tiến \vec{a}_t khác nhau nhưng tất cả chúng đều có cùng một gia tốc góc α . Do đó tổng mômen ngoại lực $\sum \tau_{ext}$ đối với một trục quay qua O:

$$\sum \tau_{ext} = \sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \alpha \quad (10.18)$$

Đặt $I = \sum m_i r_i^2$, ta có:

$$\sum \tau_{ext} = I \alpha \quad (10.18)$$

Phương trình đối với vật rắn này giống như phương trình của chất điểm chuyển động trên đường tròn (phương trình 10.16). Mômen lực tổng hợp đối với trục quay $\sum \tau_{ext}$ tỉ lệ với gia tốc góc α của vật với một hệ số tỉ lệ I.

Phương trình (10.18) là **phương trình động lực học** của mô hình phân tích vật rắn dưới tác dụng của mômen lực tổng hợp, có cùng dạng với phương trình (9.39) của hệ chất điểm:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{CM}$$

Định nghĩa và ý nghĩa của momen quán tính:

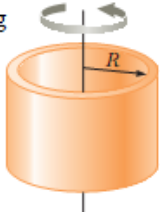
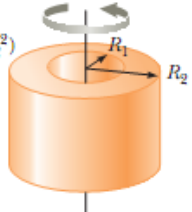
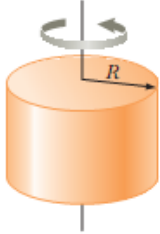
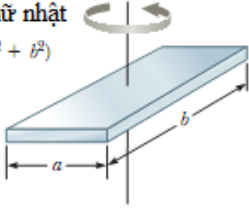

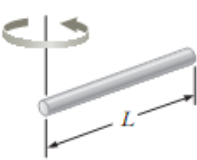
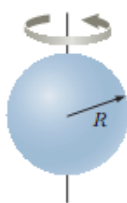
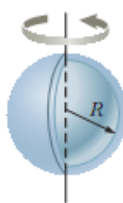
Định nghĩa: đại lượng

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (10.19)$$

được gọi là **mômen quán tính** của vật, phụ thuộc khối lượng của các chất điểm cấu tạo nên vật và khoảng cách từ chúng đến trục quay. Đối với một chất điểm $I = mr^2$. Đơn vị của mômen quán tính trong hệ SI là $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Ý nghĩa: Trong chuyển động quay, **mômen quán tính có vai trò giống như vai trò của khối lượng** trong chuyển động tịnh tiến, **nó đặc trưng cho mức quán tính của vật rắn trong chuyển động quay**. Mômen quán tính phụ thuộc khối lượng của vật và sự phân bố khối lượng xung quanh trục quay. Mômen quán tính của một số vật thể có dạng đặc biệt đối với trục quay xác định được cho trong bảng 10.2.

Tính mômen quán tính của các vật rắn có hình dạng đơn giản (có tính đối xứng cao) là tương đối dễ với điều kiện trục quay trùng với một trục đối xứng, như trình bày trong mục 10.6 tiếp theo.

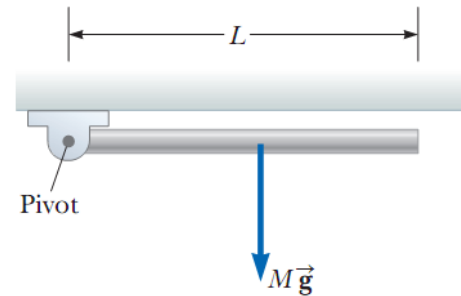
<p>Vành tròn hoặc trụ rỗng</p> $I_{CM} = MR^2$ 	<p>Khối trụ rỗng</p> $I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ 
<p>Trụ đặc hoặc đĩa tròn</p> $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ 	<p>Tấm hình chữ nhật</p> $I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ 
<p>Thanh dài, mảnh, trục quay đi qua tâm</p> $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ 	<p>Thanh dài, mảnh, trục quay đi qua một đầu thanh</p> $I = \frac{1}{3}ML^2$ 
<p>Quả cầu đặc</p> $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ 	<p>Vỏ cầu mỏng</p> $I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$ 

Bảng 10.2: Mômen quán tính của các vật rắn đồng nhất có hình dạng khác nhau

Câu hỏi 10.5: Bạn tắt máy khoan điện và thấy rằng khoảng thời gian để mũi khoan dừng lại do mômen lực ma sát trong máy khoan là Δt . Bạn thay một mũi khoan lớn hơn có mômen quán tính gấp đôi. Khi mũi khoan lớn hơn này đang quay với tốc độ góc như cái nhỏ lúc đầu và khoan được ngắt điện, mômen lực ma sát vẫn giữ nguyên như trường hợp mũi khoan nhỏ. Khoảng thời gian để mũi khoan lớn hơn dừng lại là (a) $4 \Delta t$ (b) $2 \Delta t$ (c) Δt (d) $0.5 \Delta t$ (e) $0.25 \Delta t$ (f) không thể xác định được.

Bài tập mẫu 10.3: Thanh rắn quay

Một thanh đồng nhất có chiều dài L và khối lượng M một đầu được gắn vào một trục xoay không ma sát và quay tự do quanh trục trong mặt phẳng thẳng đứng như trên hình 10.11. Thanh được thả cho chuyển động từ vị trí nằm ngang. (a) Hỏi gia tốc góc ban đầu của thanh và gia tốc dài của đầu tự do của thanh bằng bao nhiêu? (b) Nếu ta đặt một đồng xu vào cuối thanh và sau đó thả thanh? Đồng xu có tiếp xúc với thanh không?



Hình 10.11 Bài tập mẫu 10.3

Giải:

(a) Lực duy nhất gây ra mômen lực đối với trục quay là trọng lực $M\vec{g}$ tác dụng lên thanh. Độ lớn của mômen lực đối với trục quay là:

$$\sum \tau = Mg \left(\frac{L}{2} \right)$$

Gia tốc góc của vật được tính theo công thức (10.18):

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L} \quad (1)$$

Gia tốc dài của đầu tự do của thanh được tính theo công thức (10.11), với $r = L$:

$$a_t = L\alpha = \frac{3g}{2}$$

(b) Kết quả ở trên cho thấy gia tốc ban đầu của một điểm ở cuối thanh lớn hơn g :

$a_t = \frac{3g}{2} > g$. Một đồng xu không được giữ sẽ rơi với gia tốc g . Vì vậy, nếu ta đặt một

xu vào cuối thanh và sau đó thả thanh, đầu thanh sẽ rơi nhanh hơn đồng xu! Đồng xu sẽ không giữ tiếp xúc với cây gậy. (Hãy thử làm với một đồng xu và một cái thước mét!)

Câu hỏi bây giờ là tìm vị trí trên thanh mà khi ta đặt tại đó một xu thì đồng xu không rời khỏi thanh rắn khi cả hai bắt đầu rơi. Để tìm gia tốc dài của một điểm tùy ý trên thanh ở khoảng cách r từ trục quay, ta kết hợp phương trình (1) ở trên với phương trình (10.11):

$$a_t = r\alpha = \frac{3g}{2L} r$$

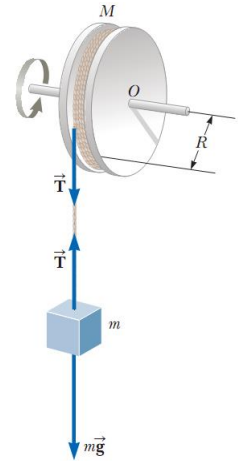
Để cho đồng xu không rời khỏi thanh, ứng với trường hợp tới hạn là gia tốc dài bằng gia tốc rơi tự do:

$$a_t = g = \frac{3g}{2L} r \Rightarrow r = \frac{2}{3} L$$

Do đó, khi một đồng xu được đặt gần trục quay hơn hai phần ba chiều dài của thanh thì sẽ còn tiếp xúc với thanh khi cả hai cùng rơi xuống. Nếu đặt đồng xu cách xa hơn điểm này thì đồng xu sẽ rời khỏi thanh rắn khi chúng cùng rơi xuống

Bài tập mẫu 10.4: Gia tốc góc của một cái bánh xe

Một bánh xe có bán kính R , khối lượng M , và mômen quán tính I được gắn trên một trục nằm ngang không ma sát như trên hình 10.12. Một sợi dây nhẹ quấn quanh bánh xe treo một vật có khối lượng m . Khi bánh xe được thả cho chuyển động, vật m sẽ chuyển động nhanh dần xuống phía dưới, sợi dây được nhả dần ra khỏi bánh xe và bánh xe quay với một gia tốc góc. Hãy tìm các biểu thức của gia tốc góc của bánh xe, gia tốc tịnh tiến của vật và lực căng của dây.



Hình 10.12 Bài tập mẫu 10.4

Giải:

Độ lớn của mômen lực tác dụng lên bánh xe đối với trục quay của nó là $\tau = TR$, trong đó T là lực do sợi dây tác dụng lên vành của bánh xe. (Trọng lực do Trái đất tác dụng lên bánh xe và phản lực pháp tuyến do trục tác dụng lên bánh xe đều đi qua trục quay và do đó không tạo ra mômen lực.)

Theo phương trình 10.18 của mô hình phân tích vật rắn chịu tác dụng của mômen lực tổng hợp:

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha$$

$$\text{suy ra } \alpha = \frac{\sum \tau_{ext}}{I} = \frac{TR}{I} \quad (1)$$

Từ mô hình chất điểm chịu tác dụng của hợp lực, áp dụng định luật 2 Newton cho vật m , chọn chiều dương hướng xuống ta có:

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{mg - T}{m} \quad (2)$$

Các phương trình (1) và (2) có 3 ẩn số α , a và T . Vì sợi dây không trượt trên bánh xe nên gia tốc tịnh tiến của vật bằng gia tốc tiếp tuyến của điểm nằm trên vành của bánh xe. Do đó gia tốc góc của bánh xe và gia tốc tịnh tiến của vật có mối liên hệ $a = R\alpha$. Kết hợp với (1) và (2) ta có:

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m} \quad (3). \text{ Suy ra } T = \frac{mg}{1 + (mR^2 / I)} \quad (4)$$

Thay (4) vào (2) ta tính được gia tốc tịnh tiến của vật: $a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$ (5)

Gia tốc góc của bánh xe là: $\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$

10.6 Tính mômen quán tính

Mômen quán tính của hệ chất điểm phân bố rời rạc được tính theo phương trình 10.19. Mômen quán tính của vật rắn được xác định bằng cách chia vật thành nhiều phần tử nhỏ, mỗi phần tử có khối lượng Δm_i , rồi tính theo định nghĩa $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$ và lấy giới hạn của tổng này khi $\Delta m_i \rightarrow 0$. Khi đó tổng trở thành tích phân lấy trên toàn bộ vật:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \tag{10.20}$$

Để tính mômen quán tính của vật rắn, ta chia nhỏ vật rắn thành những phần tử vô cùng nhỏ có khối lượng dm theo thể tích, diện tích hoặc chiều dài của các phần tử (tùy thuộc vào hình dạng vật) dễ hơn là tính theo khối lượng của chúng, cụ thể như sau:

- Vật rắn dạng dài, khối lượng m , chiều dài L (chiều rộng và chiều cao của vật rắn nhỏ hơn rất nhiều so với chiều dài): ta dùng *mật độ khối lượng dài* $\lambda = \frac{m}{L}$ là khối lượng trên một đơn vị dài. Phần tử nhỏ có chiều dài dL nên khối lượng của nó là $dm = \lambda dL$, thay vào 10.20 ta có:

$$I = \int \lambda r^2 dL \tag{10.21a}$$

- Vật rắn dạng mặt, khối lượng m , diện tích A (chiều cao của vật rắn nhỏ hơn rất nhiều so với chiều rộng và dài): ta dùng *mật độ khối lượng mặt* $\sigma = \frac{m}{A}$ là khối lượng trên một đơn vị diện tích. Phần tử nhỏ có diện tích dA nên khối lượng của nó là $dm = \sigma dA$, thay vào 10.20 ta có:

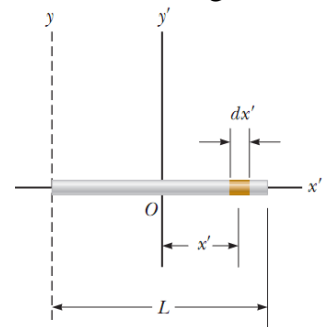
$$I = \int \sigma r^2 dA \tag{10.21b}$$

- Vật rắn dạng khối, khối lượng m , thể tích V : ta dùng *mật độ khối lượng khối* $\rho = \frac{m}{V}$ là khối lượng trên một đơn vị thể tích. Phần tử nhỏ có thể tích dV nên khối lượng của nó là $dm = \rho dV$, thay vào 10.20 ta có:

$$I = \int \rho r^2 dV \tag{10.21c}$$

Bài tập mẫu 10.5: Mômen quán tính của thanh rắn đồng nhất

Tính mômen quán tính của một thanh mảnh đồng nhất có chiều dài L và khối lượng M (hình 10.13) đối với một trục quay vuông góc với thanh (trục y') và đi qua khối tâm của thanh.



Hình 10.13 Bài tập mẫu 10.5

Giải:

Ví dụ này minh họa việc sử dụng định nghĩa mômen quán tính theo công thức (10.20). Như với bất kỳ bài toán tích phân nào, lời giải đòi hỏi đưa hàm lấy tích phân về theo một biến duy nhất.

Phần tử chiều dài được tô bóng dx' trên hình 10.13 có khối lượng dm bằng mật độ khối lượng dài nhân với dx' .

$$dm = \lambda dx' = \frac{M}{L} dx'$$

Thay biểu thức này vào công thức (10.20), với $r^2 = (x')^2$:

$$I = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} (x')^2 \frac{M}{L} dx' = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (x')^2 dx' = \frac{M}{L} \left[\frac{(x')^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2$$

Kết quả này đúng như trong bảng 10.2

Định lý các trục song song:

Việc tính mômen quán tính đối với một trục quay bất kỳ là khó khăn, ngay cả với vật có tính đối xứng cao. Ta có thể dùng **định lý các trục song song** để đơn giản hóa sự tính toán. Giả sử vật trên hình 10.14a quay quanh trục z . Mômen quán tính không phụ thuộc sự phân bố khối lượng dọc trục z . Tưởng tượng làm bẹp một vật thể 3 chiều thành một vật thể 2 chiều như trên hình 10.14b. Trong quá trình này tất cả khối lượng chuyển động song song với trục z cho đến khi nó nằm trong mặt phẳng xy . Các tọa độ khối tâm của vật lúc này là $x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}=0$. Xét phần tử khối lượng dm có các tọa độ $(x, y, 0)$ như ở hình 10.14c khi nhìn từ trên trục z xuống. Vì phần tử này cách trục z một khoảng $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, nên mômen quán tính của vật đối với trục z là:

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

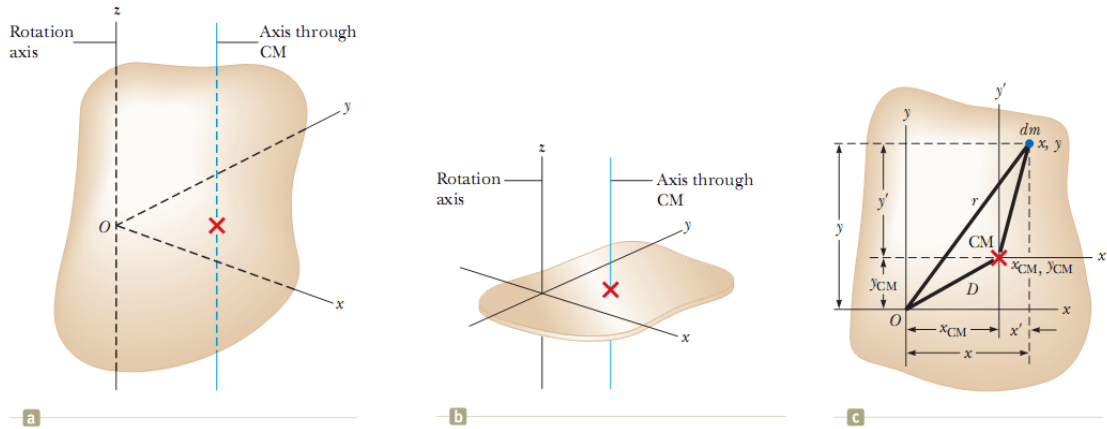
Từ hình 10.11c ta có mối liên hệ giữa các tọa độ của phần tử dm có đánh dấu phẩy và không đánh dấu phẩy là:

$$x = x' + x_{CM}; y = y' + y_{CM}; z = z' = 0$$

Do đó:

$$I = \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2] dm$$

$$I = \int [(x')^2 + (y')^2] dm + 2x_{CM} \int x' dm + 2y_{CM} \int y' dm + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm$$



Hình 10.14 a) Một vật rắn có hình dạng bất kì. Góc tọa độ không trùng với khối tâm của vật. Tưởng tượng vật quay quanh trục z . b) Tất cả các phần tử khối lượng của vật được làm cho xẹp xuống dọc theo trục z để tạo thành một vật thể phẳng. (c) Phần tử khối lượng dm bất kì được biểu thị bằng màu xanh trong hình vẽ nhìn từ trên xuống dọc theo trục z . Định lý trục song song được sử dụng với phần mô tả hình vẽ để xác định mômen quán tính của vật thể ban đầu đối với trục z .

Tích phân đầu tiên là mômen quán tính I_{CM} đối với trục quay đi qua khối tâm. Tích phân thứ hai bằng 0 vì theo định nghĩa khối tâm $\int x' dm = \int y' dm = 0$. Tích phân cuối cùng bằng MD^2 vì $\int dm = M$ và $D^2 = x_{CM}^2 + y_{CM}^2$. Do đó ta kết luận:

$$I = I_{CM} + MD^2 \tag{10.22}$$

Phương trình (10.22) là phương trình của định lý các trục song song. Dùng phương trình này, ta có thể tính momen quán tính I của vật đối với trục quay bất kỳ song song với trục quay đi qua khối tâm bằng cách tính momen quán tính đối với trục quay đi qua khối tâm I_{CM} và khoảng cách D giữa 2 trục quay.

10.7 Động năng quay

Trong chương 7 ta đã định nghĩa động năng của một vật là năng lượng liên quan đến chuyển động của nó. Vật quay quanh trục cố định thì không có động năng tịnh tiến. Tuy nhiên, các chất điểm riêng rẽ cấu tạo nên vật rắn lại đang chuyển động theo các quỹ đạo tròn. Do đó có động năng liên quan tới chuyển động quay.

Xem vật rắn như một hệ chất điểm và giả sử nó quay quanh trục z với tốc độ góc ω như trên hình 10.15. Nếu khối lượng của chất điểm thứ i là m_i , và tốc độ tiếp tuyến của nó là v_i thì động năng của nó là:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Khi vật rắn quay thì mọi chất điểm của nó có cùng tốc độ góc ω nhưng tốc độ tiếp tuyến của mỗi chất điểm phụ thuộc vào khoảng cách đến trục quay r_i .

Động năng toàn phần của vật rắn là tổng động năng của các chất điểm riêng rẽ:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

Có thể viết biểu thức này như sau:

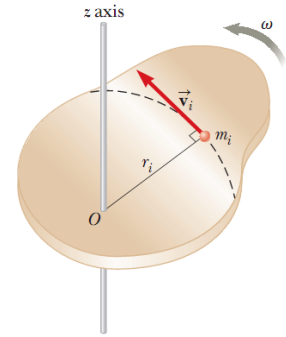
$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \quad (10.23)$$

Đại lượng trong dấu ngoặc đơn là mômen quán tính I của vật rắn. Do đó phương trình 10.23 được viết thành:

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (10.24)$$

Ta thường quy cho đại lượng $\frac{1}{2} I \omega^2$ là động năng quay, nhưng nó không phải là một dạng năng lượng mới. Nó là động năng thông thường vì nó là tổng động năng của các chất điểm riêng rẽ cấu tạo nên vật rắn. Công thức động năng (10.24) tiện lợi khi giải bài toán chuyển động quay, với điều kiện là tính được I.

Có sự tương tự giữa động năng tịnh tiến $\frac{1}{2} m v^2$ và động năng quay $\frac{1}{2} I \omega^2$. Các đại lượng I và ω trong chuyển động quay tương ứng với các đại lượng m và v trong chuyển động tịnh tiến.



Hình 10.15 Vật rắn quay quanh trục cố định với tốc độ góc ω . Động năng của chất điểm khối lượng m_i là $\frac{1}{2} m_i v_i^2$. Động năng toàn phần của vật được gọi là động năng quay của nó.

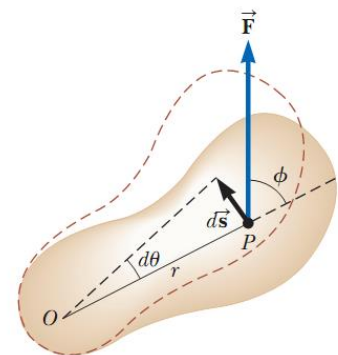
Câu hỏi 10.6: Một trụ rỗng và một trụ đặc có cùng bán kính, khối lượng và chiều dài. Cả hai đều quay quanh trục của chúng với cùng tốc độ góc. Vật nào có động năng quay hơn?
 (a) trụ rỗng. (b) trụ đặc. (c) Chúng có cùng động năng quay. (d) Không thể xác định được.

10.8 Khảo sát năng lượng trong chuyển động quay

Trong chương này, khi khảo sát chuyển động quay của vật rắn ta chủ yếu sử dụng cách tiếp cận liên quan đến lực, và dẫn đến mômen lực tác dụng lên vật. Ở mục 10.7 ta đã xét năng lượng là động năng quay của vật rắn. Bây giờ ta sẽ mở rộng các thảo luận sơ bộ trên đây để thấy cách tiếp cận năng lượng có ích như thế nào khi giải các bài toán chuyển động quay. Ta bắt đầu bằng cách khảo sát mối liên hệ giữa mômen lực tác dụng lên vật rắn và chuyển động quay do nó gây ra với mục đích dẫn ra các biểu thức của công suất và tìm ra định lí công-động năng trong chuyển động quay.

Xét vật rắn quay quanh điểm O như trên hình 10.16.

Giả sử ngoại lực \vec{F} nằm trong mặt phẳng giấy, tác dụng tại P của vật. Công do lực \vec{F} thực hiện khi làm cho điểm P quay đi một đoạn vô cùng nhỏ $ds = r d\theta$ là:



Hình 10.16 Vật rắn quay quanh trục cố định đi qua O dưới tác dụng của lực \vec{F} tại điểm P.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \varphi)rd\theta$$

Trong đó $F \sin \varphi$ là thành phần tiếp tuyến của \vec{F} , hay là thành phần lực dọc theo độ dời. Lưu ý là thành phần pháp tuyến \vec{F} không thực hiện công lên vật vì nó vuông góc với độ dời.

Vì độ lớn của mômen lực \vec{F} đối với trục quay đi qua O là $rF \sin \varphi$ (phương trình 10.14) nên có thể viết:

$$dW = \tau d\theta \tag{10.25}$$

Tốc độ sinh công của lực \vec{F} khi vật quay quanh trục cố định một góc $d\theta$ trong khoảng thời gian dt là:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Vì $\frac{dW}{dt}$ là công suất tức thời P (xem mục 8.5) được cung cấp bởi lực và $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, biểu thức trên trở thành:

$$P = \tau\omega \tag{10.26}$$

Công thức này tương tự như công thức công suất $P = Fv$ trong chuyển động tịnh tiến, và phương trình (10.25) tương tự với $dW = F_x dx$.

Ta có thể biểu diễn mômen lực như sau:

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

Sắp xếp lại biểu thức này và để ý là $\sum \tau_{ext} d\theta = dW$, ta có:

$$\sum \tau_{ext} d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Tích phân biểu thức này ta thu được công do ngoại lực thực hiện lên vật rắn quay:

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \tag{10.27}$$

Bảng 10.3: Các phương trình cần nhớ của chuyển động quay và chuyển động tịnh tiến

Chuyển động quay quanh trục cố định	Chuyển động tịnh tiến
Tốc độ góc $\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Tốc độ dài $v = \frac{dx}{dt}$
Gia tốc góc $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	Gia tốc dài $a = \frac{dv}{dt}$
Tổng mômen ngoại lực $\sum \tau_{ext} = I\alpha$	Tổng ngoại lực $\sum F = ma$
Nếu $\alpha = const$	Nếu $a = const$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{array} \right.$$

Công $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$

Động năng quay $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

Công suất $P = \tau\omega$

Mômen động lượng $L = I\omega$

Mômen lực thực tế $\sum \tau = \frac{dL}{dt}$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{array} \right.$$

Công $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$

Động năng $K = \frac{1}{2}mv^2$

Công suất $P = Fv$

Động lượng $p = mv$

Lực thực tế $\sum F = \frac{dp}{dt}$

Trong đó tốc độ góc thay đổi từ ω_i đến ω_f . Phương trình (10.27) là định lý công-động năng đối với chuyển động quay. Định lý này phát biểu rằng công do ngoại lực thực hiện lên vật rắn đối xứng đang quay quanh trục cố định thì bằng độ biến thiên động năng quay của vật.

Định lý này là một dạng của mô hình hệ không cô lập (năng lượng) đã thảo luận trong chương 8. Công thực hiện lên hệ vật rắn biểu thị sự truyền năng lượng qua biên của hệ do sự tăng động năng quay của vật.

Tổng quát, có thể tổ hợp định lý này với định lý công-động năng trong chuyển động tịnh tiến ở chương 7. Cho nên công do ngoại lực thực hiện lên vật bằng độ biến thiên động năng toàn phần gồm động năng tịnh tiến và động năng quay của vật. Ví dụ khi một cầu thủ ném quả bóng thì công thực hiện bởi tay của cầu thủ lên quả bóng bằng động năng do quả bóng chuyển động trong không gian và động năng quay của quả bóng.

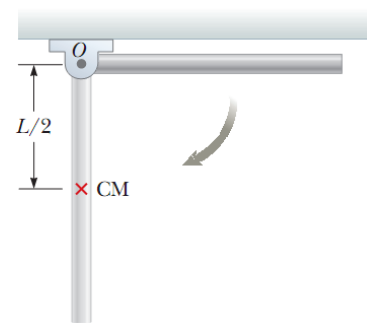
Ngoài định lý công-động năng, các nguyên lý năng lượng khác cũng áp dụng được cho chuyển động quay. Ví dụ vật đang quay và không có các lực không bảo toàn tác dụng lên hệ thì có thể dùng mô hình hệ cô lập và nguyên lý bảo toàn cơ năng để phân tích hệ. Độ biến thiên động năng trong phương trình bảo toàn năng lượng 8.2 sẽ gồm cả độ biến thiên động năng tịnh tiến và độ biến thiên động năng quay.

Trong một số trường hợp, nếu cách tiếp cận năng lượng không đủ thông tin để giải bài toán thì phải kết hợp với cách tiếp cận động lượng. Một trường hợp như vậy được minh họa trong ví dụ 10.14 trong mục 10.9.

Bảng 10.3 liệt kê các phương trình liên quan đến chuyển động quay cùng với các công thức tương ứng của chuyển động tịnh tiến. Lưu ý đến sự giống nhau về dạng toán học của các phương trình. Hai phương trình cuối cùng ở cột bên trái của bảng 10.3 liên quan đến mômen động lượng L sẽ được trình bày trong chương 11. Ở đây chúng được đưa vào với mục đích làm hoàn chỉnh bảng các công thức chuyển động quay và chuyển động tịnh tiến.

Bài tập mẫu 10.6: Thanh rắn quay

Một thanh rắn đồng nhất có chiều dài L và khối lượng M quay tự do không ma sát trên một cái chốt đi qua một đầu thanh (hình 10.17). Thanh được thả cho quay từ trạng thái nghỉ tại vị trí nằm ngang. (A) Tốc độ góc của thanh khi nó chuyển động đến vị trí thấp nhất là bao nhiêu? (B) Hãy xác định tốc độ tiếp tuyến của khối tâm và tốc độ tiếp tuyến của điểm thấp nhất trên thanh khi thanh ở vị trí thẳng đứng.



Hình 10.17 Bài tập mẫu 10.6

Giải:

(A) Như đã đề cập ở bài tập mẫu 10.4, gia tốc góc của thanh không phải là hằng số. Do đó, các phương trình động học của chuyển động quay (mục 10.2) không áp dụng được cho bài tập mẫu này. Ta xem hệ gồm thanh và Trái đất là một hệ cô lập về mặt năng lượng (vì không có các lực không bảo toàn tác dụng lên hệ) và sử dụng định luật bảo toàn cơ năng cho hệ.

Ta chọn gốc thế năng là vị trí khối tâm của thanh khi thanh nằm thẳng đứng. Khi thanh ở vị trí nằm ngang, nó không có động năng quay. Thế năng của hệ khi thanh nằm ngang là $MgL/2$ vì khối tâm của thanh ở độ cao $L/2$ so với gốc tính thế năng. Khi thanh đến vị trí thấp nhất, năng lượng của hệ là động năng quay.

Theo mô hình hệ cô lập năng lượng ta có:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Thay các giá trị lúc đầu và lúc sau của hệ vào ta có:

$$\left(\frac{1}{2} I \omega^2 - 0\right) + \left(0 - \frac{1}{2} MgL\right) = 0 \text{ với } I = \frac{1}{3} ML^2$$

Ta tính được tốc độ góc của thanh khi nó chuyển động đến vị trí thấp nhất là:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3} ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

(B) Sử dụng phương trình (10.10) và kết quả ở phần (A), ta có:

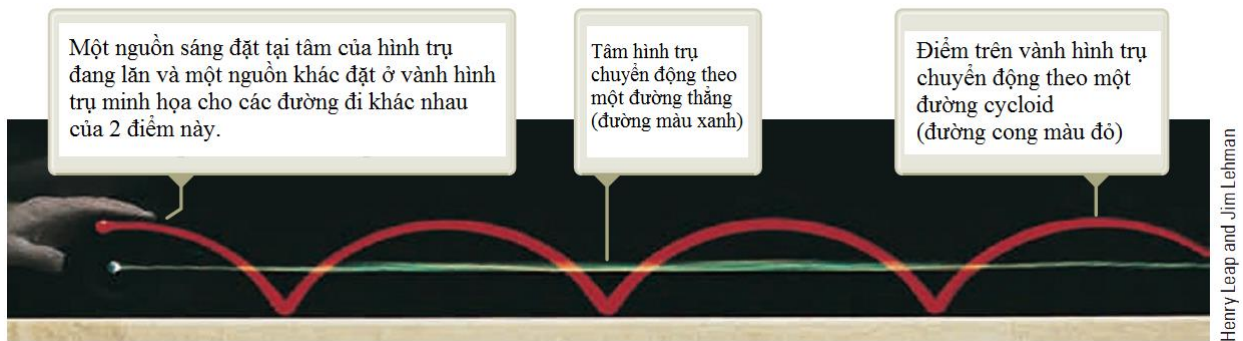
$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2} \omega = \frac{1}{2} \sqrt{3gL}$$

Vì r của điểm thấp nhất trên thanh bằng hai lần r của khối tâm nên điểm thấp nhất của thanh có tốc độ tiếp tuyến gấp đôi tốc độ tiếp tuyến của khối tâm:

$$v = 2v_{CM} = \sqrt{3gL}$$

10.9 Chuyển động lăn của vật rắn

Trong mục này ta xét chuyển động của vật rắn lăn trên mặt phẳng. Ví dụ, xét một khối trụ lăn trên một đường thẳng sao cho trục quay của nó luôn song song với hướng lúc đầu của nó. Như hình 10.18 cho thấy, một điểm trên vành của hình trụ chuyển động theo một đường phức tạp gọi là *cycloid*. Tuy nhiên ta đơn giản hóa vấn đề bằng cách chú ý đến khối tâm của vật hơn là điểm trên vành của vật đang lăn. Như thấy trên hình 10.18, khối tâm của vật chuyển động theo đường thẳng. Nếu một vật lăn không trượt trên mặt phẳng (gọi là *chuyển động lăn thuần túy*) thì tồn tại một mối liên hệ đơn giản giữa chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của nó.



Hình 10.18 Hai điểm trên một vật đang lăn có quỹ đạo khác nhau trong không gian

Xét một khối trụ đồng nhất có bán kính R lăn không trượt trên một mặt phẳng nằm ngang (hình 10.19).

Khi trụ quay được một góc θ thì khối tâm của nó đi được một đoạn $s = R\theta$. Do đó, tốc độ chuyển động tịnh tiến của khối tâm là:

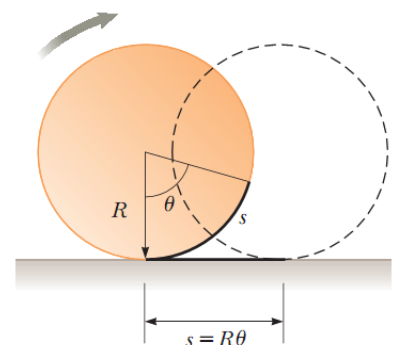
$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (10.28)$$

trong đó ω là tốc độ góc của hình trụ. Phương trình 10.28 đúng khi khối trụ hoặc khối cầu lăn không trượt và là điều kiện đối với chuyển động lăn thuần túy.

Độ lớn gia tốc tịnh tiến của khối tâm là:

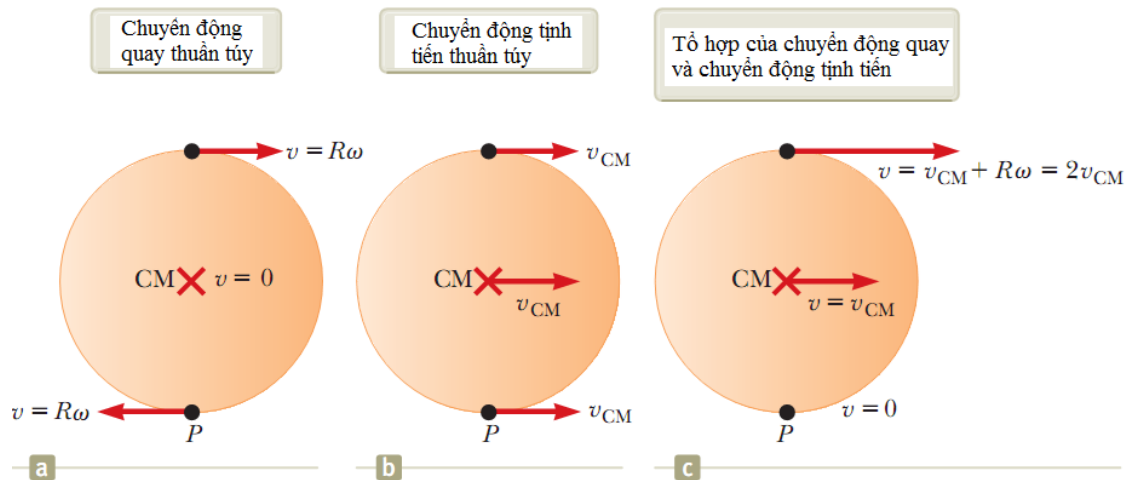
$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha \quad (10.29)$$

trong đó α là gia tốc góc của khối trụ.



Hình 10.19 Đối với chuyển động lăn thuần túy, khi hình trụ quay được một góc θ thì khối tâm của nó đi được một đoạn thẳng $s = R\theta$

Khi một vật lăn có tốc độ khối tâm v_{CM} , nếu bạn đi gần vật cũng với tốc độ v_{CM} , tức là bạn đứng yên so với khối tâm của vật. Quan sát vật bạn sẽ thấy nó chuyển động quay thuần túy quanh khối tâm. Hình 10.20a biểu thị vận tốc của các điểm ở đỉnh, tâm và đáy của vật như bạn quan sát thấy. Hình 10.20b chỉ ra vận tốc của các điểm này khi vật chuyển động tịnh tiến. Trong hệ quy chiếu đứng yên so với bề mặt lăn, vận tốc của một điểm ở trên vật là tổng của các vận tốc trên hình 10.20a và 10.20b. Hình 10.20c cho thấy kết quả cộng các vận tốc.



Hình 10.20: Chuyển động của vật đang lăn được mô hình hóa bằng sự tổ hợp của chuyển động tịnh tiến thuần túy và chuyển động quay thuần túy

Chú ý là điểm tiếp xúc giữa vật và mặt phẳng trên hình 10.20c có vận tốc tịnh tiến bằng không. Lúc này vật lăn chuyển động như là không có mặt phẳng ngang và vật bị gắn chốt tại điểm P và quay quanh trục đi qua điểm P. Ta có thể biểu diễn động năng toàn phần của vật rắn quay tương đương này là:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \tag{10.30}$$

trong đó I_P là mômen quán tính đối với trục quay đi qua P.

Do lúc này chuyển động của vật tương đương này giống với chuyển động của vật rắn quay thực tế, nên phương trình (10.30) cũng là động năng của vật lăn. Áp dụng định lý Steiner-Huyghens, ta có thể thay $I_P = I_{CM} + MR^2$ vào phương trình (10.30) để có:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

Sử dụng $v_{CM} = R\omega$, phương trình này có thể được biểu diễn như sau:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \tag{10.31}$$

Đây là động năng toàn phần của một vật đang lăn.

Số hạng $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ biểu diễn động năng quay của vật quanh khối tâm của nó, và số hạng $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ biểu diễn động năng của vật khi nó chỉ chuyển động tịnh tiến. Do đó, động năng toàn phần của một vật đang lăn là tổng động năng quay quanh khối tâm và động năng tịnh tiến của khối tâm. Phát biểu này phù hợp với trường hợp minh họa trên hình 10.20, trong đó vận tốc của mỗi điểm trên vật bằng tổng vận tốc khối tâm và vận tốc tiếp tuyến quanh khối tâm.

Có thể dùng phương pháp năng lượng để giải các bài toán chuyển động quay của vật trên mặt phẳng nghiêng. Ví dụ, xem hình 10.21, một quả cầu lăn không trượt sau khi được thả từ trạng thái đứng yên từ đỉnh của mặt phẳng nghiêng. Chuyển động lăn có gia tốc xảy ra với

điều kiện có lực ma sát giữa quả cầu và mặt nghiêng để tạo ra mômen lực đối với khối tâm. Mặc dù có ma sát nhưng cơ năng vẫn bảo toàn vì điểm tiếp xúc đứng yên tương đối so với bề mặt tại bất kỳ thời điểm nào. (Nói cách khác, nếu quả cầu trượt thì cơ năng của hệ quả cầu-mặt phẳng nghiêng-Trái đất sẽ giảm do có lực không bảo toàn là lực ma sát động).

Trong thực tế, ma sát lăn làm cho cơ năng chuyển thành nội năng. Ma sát lăn là do sự biến dạng của bề mặt và vật đang lăn. Ví dụ lốp ô tô oằn xuống khi lăn trên đường, thể hiện sự chuyển cơ năng thành nội năng. Đường cũng bị biến dạng một lượng nhỏ, thể hiện có ma sát lăn thêm vào. Trong các mô hình giải bài toán, ta bỏ qua ma sát lăn trừ khi có nói rõ.

Sử dụng $v_{CM} = R\omega$ cho chuyển động lăn thuần túy, có thể biểu diễn phương trình 10.28 như sau:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \left(\frac{v_{CM}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \rightarrow K = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2 \quad (10.32)$$

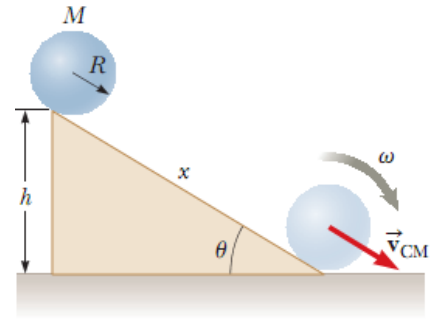
Đối với hệ quả cầu- Trái đất trên hình 10.26, ta chọn gốc thế năng ở chân mặt phẳng nghiêng, do đó, theo định luật bảo toàn cơ năng:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

$$v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + \left(\frac{I_{CM}}{MR^2} \right)} \right]^{1/2} \quad (10.33)$$

Câu hỏi 10.7: Một quả bóng bắt đầu lăn không trượt xuống một mặt phẳng nghiêng A từ trạng thái đứng yên. Đồng thời, một cái hộp bắt đầu trượt xuống trên mặt phẳng nghiêng B, giống hệt với mặt phẳng nghiêng A nhưng không có ma sát. Vật nào đến chân mặt phẳng nghiêng trước? (a) Quả bóng. (b) Hộp. (c) Cả hai đều đến cùng một lúc. (d) Không thể xác định được.



Hình 10.21: Một quả cầu đang lăn xuống mặt phẳng nghiêng. Cơ năng của hệ quả cầu - Trái đất được bảo toàn nếu không xảy ra chuyển động trượt.

Tóm tắt chương 10

Định nghĩa

Vị trí góc của vật rắn là góc θ giữa một đường chuẩn được gắn với vật và một đường chuẩn cố định trong không gian. **Độ dời góc** của chất điểm chuyển động trên đường tròn hoặc vật rắn quay quanh trục cố định là $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

Tốc độ góc tức thời của chất điểm chuyển động trên đường tròn hoặc của vật rắn quay quanh trục cố định là

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (10.3)$$

Gia tốc góc tức thời của chất điểm chuyển động trên đường tròn hoặc của vật rắn quay quanh trục cố định là

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (10.5)$$

Khi vật rắn quay quanh một trục cố định, các phần của vật có cùng tốc độ góc và gia tốc góc.

Độ lớn của **mômen lực** liên quan đến lực \vec{F} tác dụng lên vật tại điểm cách trục quay một khoảng r là:

$$\tau = rF \sin \varphi = Fd \quad (10.14)$$

Trong đó φ là góc giữa vectơ vị trí của điểm chịu tác dụng của lực và vectơ lực, d là cánh tay đòn của lực, là khoảng cách vuông góc từ trục quay tới giá của lực \vec{F} .

Mômen quán tính của một hệ chất điểm được định nghĩa là:

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad (10.19)$$

Trong đó m_i là khối lượng của chất điểm thứ i , r_i là khoảng cách từ chất điểm đó đến trục quay.

Khái niệm và nguyên lý

Khi vật rắn quay quanh trục cố định thì vị trí góc, tốc độ góc và gia tốc góc liên hệ với vị trí, tốc độ dài và gia tốc dài qua các mối liên hệ sau:

$$s = r\theta \quad (10.1a)$$

$$v = r\omega \quad (10.10)$$

$$a_t = r\alpha \quad (10.11)$$

Nếu vật rắn quay quanh trục cố định với tốc độ góc ω , **động năng quay** của nó là:

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (10.24)$$

trong đó I là mômen quán tính của vật đối với trục quay.

Mômen quán tính của vật rắn là:

$$I = \int r^2 dm \quad (10.20)$$

Trong đó r là khoảng cách từ phần tử khối lượng dm đến trục quay.

Tốc độ sinh công của ngoại lực khi làm quay vật rắn quanh một trục cố định, hoặc **công suất** được cung cấp là:

$$P = \tau\omega \tag{10.26}$$

Nếu công thực hiện lên vật rắn và kết quả duy nhất là làm quay vật rắn quanh một trục cố định thì công do các ngoại lực thực hiện khi làm quay vật bằng độ biến thiên động năng quay của vật:

$$\sum W = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \tag{10.27}$$

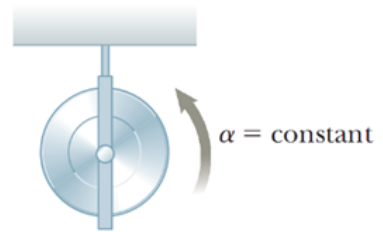
Động năng toàn phần của một vật rắn lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng thì bằng động năng quay quanh khối tâm của nó cộng với động năng tịnh tiến của khối tâm:

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \tag{10.31}$$

Các mô hình phân tích

Vật rắn quay với gia tốc góc không đổi

Nếu một vật rắn quay quanh trục cố định với gia tốc góc không đổi, có thể áp dụng các phương trình động học tương tự các phương trình động học của chuyển động tịnh tiến với gia tốc không đổi:



$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \tag{10.6}$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{10.7}$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \tag{10.8}$$

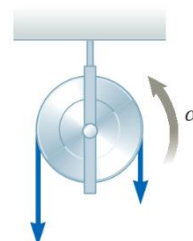
$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \tag{10.9}$$

Vật rắn quay dưới tác dụng của mômen lực tổng hợp

Nếu vật rắn quay tự do quanh trục cố định và có các mômen ngoại lực tác dụng lên nó, thì vật có gia tốc góc α , trong đó:

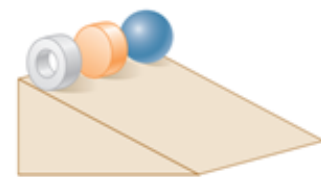
$$\sum \tau_{ext} = I\alpha \tag{10.18}$$

Phương trình này trong chuyển động quay tương tự như định luật 2 Newton trong mô hình chất điểm chịu tác dụng của hợp lực.



Câu hỏi lý thuyết chương 10

1. Một quả bóng lăn không trượt trên sàn nhà, khối tâm của nó chuyển động với một tốc độ nào đó. Một khối nước đá có khối lượng bằng khối lượng của quả bóng được cho trượt trên sàn theo đường song song với đường đi của quả bóng với tốc độ bằng tốc độ khối tâm của quả bóng. Vật nào có (i) động năng lớn hơn? (a) Quả bóng. (b) Khối nước đá. (c) Bằng nhau. Vật nào có (ii) động lượng lớn hơn? (a) Quả bóng. (b) Khối nước đá. (c) Bằng nhau. (iii) Hai vật phải đi lên đoạn đường dốc. Vật nào sẽ đi chuyển được xa hơn? (a) Quả bóng. (b) Khối nước đá. (c) Chúng đi được các đoạn bằng nhau.
2. Một chiếc máy bay đồ chơi được treo lên trần nhà bằng một sợi dây. Bạn xoay chiếc máy bay nhiều lần để quấn dây treo quanh nó theo chiều kim đồng hồ sau đó thả nó ra. Chiếc máy bay bắt đầu quay ngược chiều kim đồng hồ càng lúc nhanh hơn. Giả sử chiều ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và ma sát có thể bỏ qua. Khi dây hoàn toàn không bị cuốn quanh máy bay, tốc độ quay của máy bay là cực đại. (i) Tại thời điểm này gia tốc góc của nó là (a) dương, (b) âm, hoặc (c) bằng không? (ii) Máy bay tiếp tục chuyển động quay đi lên phía trên rồi dừng lại, lúc này dây bị quấn ngược chiều kim đồng hồ. Ngay tại thời điểm nó dừng lại gia tốc góc của nó là (a) dương, (b) âm, hoặc (c) bằng không?
3. Giả sử chỉ có hai ngoại lực có độ lớn bằng nhau nhưng ngược hướng tác dụng lên một vật rắn đang đứng yên. Hỏi với điều kiện nào thì vật bắt đầu quay?
4. Giả sử bạn có hai quả trứng, một quả đã luộc chín và một quả chưa luộc. Bạn muốn xác định quả trứng nào đã được luộc chín mà không làm vỡ trứng, có thể xác định bằng cách cho hai quả trứng quay trên sàn nhà và so sánh chuyển động quay của chúng. (a) Quả trứng nào quay nhanh hơn? (b) Quả trứng nào quay đều hơn? (c) Dùng tay làm cho quả trứng đang quay dừng lại và lập tức thả tay ra? Hãy giải thích các câu trả lời (a), (b) và (c).
5. Giả sử bạn cho quyển sách trượt trên một sàn nhà với một tốc độ ban đầu nào đó. Nó nhanh chóng dừng lại vì tác dụng của lực ma sát giữa sách và sàn nhà. Tiếp theo, bạn cho quả bóng rổ lăn trên sàn với tốc độ ban đầu bằng với tốc độ ban đầu của quyển sách thì nó lăn được đến cuối căn phòng. (a) Tại sao quả bóng rổ lại lăn được xa như vậy? (b) Lực ma sát có ảnh hưởng đáng kể đến chuyển động của quả bóng rổ không?
6. Có 3 vật rắn với mật độ khối lượng đồng nhất, 1 vật là quả cầu đặc, 1 vật dạng trụ đặc và 1 vật dạng trụ rỗng như hình bên. Cả 3 vật đặt trên đỉnh mặt phẳng nghiêng và được thả cho lăn xuống từ trạng thái nghỉ. Chúng đều lăn xuống mà không trượt. (a) Hỏi vật nào đến chân mặt phẳng nghiêng trước tiên? (b) Vật nào đến chân mặt phẳng nghiêng cuối cùng?

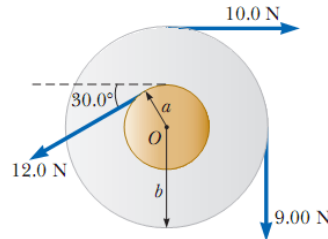


Chú ý: kết quả không phụ thuộc khối lượng và bán kính của các vật.

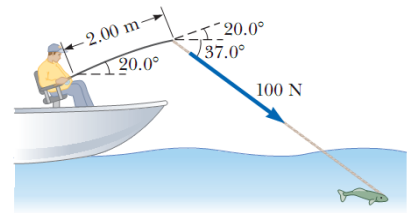
Bài tập chương 10

1. Vị trí góc của một cánh cửa xoay được mô tả bởi $\theta = 5.00 + 10.0t + 2.00t^2$ trong đó θ tính bằng rad và t tính bằng giây. Hãy xác định tọa độ góc, tốc độ góc và gia tốc góc của cánh cửa tại thời điểm (a) $t = 0$ và (b) $t = 3.00$ s.

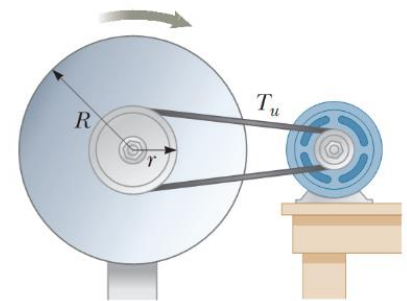
- Một vật bắt đầu quay nhanh dần đều từ trạng thái đứng yên quay với gia tốc góc $\alpha = 10 + 6t$, trong đó α tính theo rad/s^2 và t tính bằng giây. Xác định góc tính bằng radian mà vật quay được trong 4.0 giây đầu tiên.
- Một bánh xe bắt đầu quay từ trạng thái đứng yên với gia tốc góc không đổi để đạt được tốc độ góc 12.0 rad/s sau 3.00 s. Hãy tìm (a) độ lớn của gia tốc góc của bánh xe và (b) góc tính bằng radian mà nó quay được trong khoảng thời gian này.
- Bánh xe có đường kính 2.00 m nằm trong mặt phẳng thẳng đứng và quay với gia tốc góc không đổi 4.00 rad/s^2 . Bánh xe bắt đầu quay từ trạng thái đứng yên. Tại thời điểm $t = 0$ lúc bánh xe bắt đầu quay, vector bán kính của một điểm nào đó P trên vành tạo thành một góc 57.3° so với phương ngang. Tại $t = 2.00 \text{ s}$, hãy tìm (a) tốc độ góc của bánh xe và, (b) tốc độ tiếp tuyến, (c) gia tốc toàn phần, (d) tọa độ góc của điểm P.
- Hãy tìm mômen lực tổng hợp tác dụng lên bánh xe trên hình bên đối với trục quay đi qua điểm O, lấy $a = 10.0 \text{ cm}$ và $b = 25.0 \text{ cm}$.



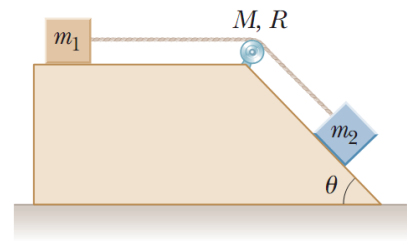
- Cần câu trên hình tạo thành một góc 20.0° so với phương nằm ngang. Tính mômen lực do con cá thực hiện đối với trục quay vuông góc với mặt phẳng giấy và đi qua bàn tay của người câu cá nếu cá kéo cần câu một lực $\vec{F} = 100 \text{ N}$ theo góc 37.0° dưới phương nằm ngang? Lực tác dụng tại điểm cách tay của người câu cá 2.00 m.



- Một động cơ điện làm quay bánh đà thông qua một đai điều khiển nối một ròng rọc trên động cơ và một ròng rọc được gắn chặt vào bánh đà như trên hình. Bánh đà là một đĩa đặc có khối lượng 80.0 kg và bán kính $R = 0.625 \text{ m}$ quay trên một trục không ma sát. Ròng rọc gắn trên bánh đà có khối lượng rất nhỏ và bán kính $r = 0.230 \text{ m}$. Lực căng T_u ở phần trên của đai là 135 N, và bánh đà có gia tốc góc theo chiều kim đồng hồ là 1.67 rad/s^2 . Tìm lực căng của đoạn dây đai phía dưới.

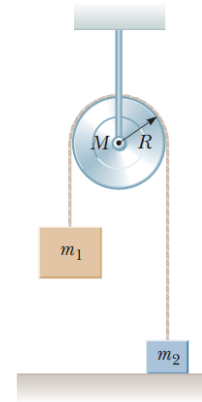


- Vật $m_1 = 2.00 \text{ kg}$ và vật $m_2 = 6.00 \text{ kg}$ được nối với nhau bằng sợi không có khối lượng vắt qua ròng rọc hình đĩa đặc có bán kính $R = 0.250 \text{ m}$ và khối lượng $M = 10.0 \text{ kg}$. Mặt nghiêng tạo thành một góc $\theta = 30^\circ$ so với phương ngang như trên hình P10.32. Hệ số ma sát động là 0.360 đối với cả hai vật. (a) Vẽ sơ đồ lực cho các vật và ròng



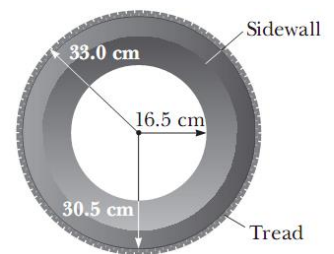
rọc. Xác định (b) gia tốc của các vật m_1 , m_2 và (c) các lực căng trên các đoạn dây ở hai phía của ròng rọc.

9. Xét cơ hệ như trên hình với $m_1 = 20.0$ kg, $m_2 = 12.5$ kg, $R = 0.200$ m, và khối lượng của ròng rọc $M = 5.00$ kg. Vật m_2 nằm trên sàn nhà, và vật m_1 ở độ cao 4.00 m so với sàn nhà khi nó được thả từ trạng thái đứng yên. Bỏ qua ma sát ở trục ròng rọc. Sợi dây nhẹ, không co giãn và không trượt trên ròng rọc. (a) Tính khoảng thời gian cần thiết để vật m_1 chạm sàn. (b) Nếu ròng rọc không có khối lượng thì khoảng thời gian cần thiết để vật m_1 chạm sàn là bao nhiêu?

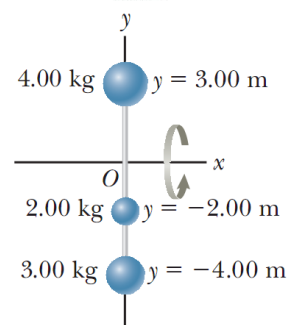


10. Một cánh cửa đồng nhất, cứng, mỏng, có chiều cao 2.20 m, rộng 0.870 m và khối lượng 23.0 kg. (a) Tìm mômen quán tính của cánh cửa đối với trục quay là các bản lề của nó. (b) Có đủ điều kiện nào của đề bài là không cần thiết không?

11. Hình bên biểu diễn cái lốp xe khi chưa lắp vào bánh xe. Mô hình cái lốp như là gồm hai thành bên, mỗi cái có độ dày 0.635 cm và một bức ta-lông có độ dày 2.50 cm và bề rộng 20.0 cm. Giả sử lốp xe có mật độ đồng nhất 1.10×10^3 kg/m³. Tính mômen quán tính của lốp xe so với trục vuông góc với mặt phẳng trang giấy và đi qua tâm của nó.

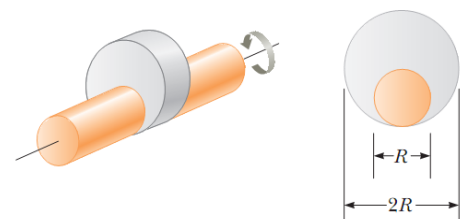


12. Ba chất điểm được nối với nhau bằng các thanh cứng có khối lượng không đáng kể đặt nằm dọc theo trục y. Hệ thống này quay quanh trục x với tốc độ góc 2.00 rad/s. Hãy tìm (a) mômen quán tính của hệ đối với trục x, (b) động năng quay toàn phần của hệ tính theo công thức $\frac{1}{2} I \omega^2$, (c) tốc độ tiếp tuyến của mỗi chất điểm, và (d)



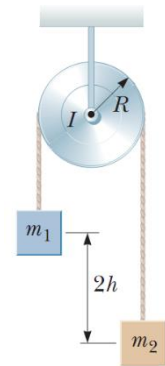
tổng động năng của hệ tính theo công thức $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$. (e) So sánh các động năng tính được trong phần (a) và phần (b).

13. Nhiều máy sử dụng bánh lệch tâm cho các mục đích khác nhau, chẳng hạn như van đóng mở. Trên hình P10.46, bánh lệch tâm là một đĩa tròn bán kính R với một lỗ tròn đường kính R xuyên qua nó. Lỗ tròn này không đi qua tâm của đĩa. Bánh lệch tâm có khối lượng M, được gắn lên trên một thanh hình trụ cứng, đồng nhất, có đường kính R và cũng có khối lượng M. Tính động năng của hệ gồm bánh lệch tâm và thanh hình trụ khi quay với tốc độ góc ω quanh trục của hình trụ?



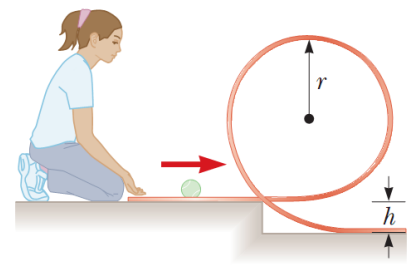
14. Một cái bàn quay nằm ngang có trọng lượng 800 N là một đĩa đặc bán kính 1.50 m bắt đầu quay từ trạng thái đứng yên do tác dụng của một lực không đổi nằm ngang có độ lớn 50.0 N theo phương tiếp tuyến với mép của bàn quay. Tìm động năng của bàn quay sau 3.00 s.

15. Xét hai vật m_1 và m_2 với $m_1 > m_2$ được nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ vắt qua ròng rọc có một quán tính I đối với trục quay của nó như trên hình. Sợi dây không dẫn và không trượt trên ròng rọc. Bỏ qua ma sát của ròng rọc. Hai vật được thả cho chuyển động khi cách nhau một khoảng $2h$ theo phương thẳng đứng. (a) Sử dụng bảo toàn năng lượng để tìm tốc độ của các vật khi chúng chạy qua nhau. (b) Tìm tốc độ góc của ròng rọc tại thời điểm đó.

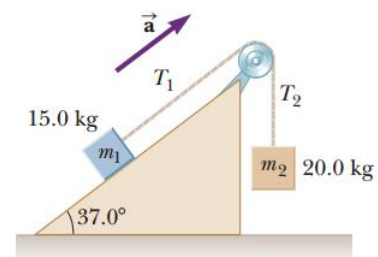


16. Một hình trụ có trọng lượng 10.0 kg lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang. Tại một thời điểm nào đó, khối tâm của vật có tốc độ 10.0 m/s. Hãy xác định (a) động năng tịnh tiến của khối tâm của vật, (b) động năng quay của vật, và (c) năng lượng toàn phần của nó.

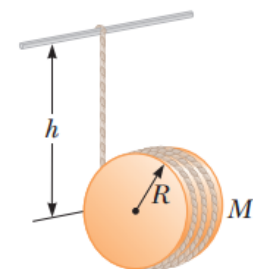
17. Một quả bóng tennis là một quả cầu rỗng thành mỏng lăn không trượt với tốc độ 4.03 m/s trên đoạn nằm ngang của một đường ray như trên hình. Nó lăn ở phía bên trong của một vòng tròn thẳng đứng có bán kính $r = 45.0$ cm. Khi quả bóng tới gần đáy của vòng tròn, đường ray được uốn sao cho quả bóng rời khỏi đường ray tại điểm có độ cao $h = 20.0$ cm bên dưới phần nằm ngang. (a) Hãy tìm tốc độ của quả bóng khi nó đi qua đỉnh của vòng tròn. (b) Chứng tỏ rằng quả bóng sẽ không rời khỏi đường ray tại vị trí cao nhất của vòng tròn. (c) Tìm tốc độ của quả bóng khi nó rời khỏi đường ray ở bên dưới. (d) Giả sử ma sát tĩnh giữa bóng và đường ray là không đáng kể sao cho bóng trượt thay vì lăn. Tốc độ của bóng tại đỉnh của vòng tròn lúc này sẽ lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng so với trường hợp chuyển động lăn? (e) Giải thích câu trả lời của bạn ở phần (d).



18. Cho cơ hệ như hình, hai vật được nối với nhau bằng sợi dây có khối lượng không đáng kể vắt qua một ròng rọc bán kính $r = 0,25$ m và có mômen quán tính I . Vật m_1 đang chuyển động trên mặt phẳng nghiêng không có ma sát với gia tốc không đổi $a = 2\text{m/s}^2$. (a) Vẽ sơ đồ lực cho các vật m_1 , m_2 và ròng rọc. (b) Hãy tính lực căng dây T_1 , T_2 và mômen quán tính I của ròng rọc.



19. Một cuộn dây được quấn quanh một đĩa tròn đặc, đồng nhất có bán kính R và khối lượng M , và đầu trên của cuộn dây được buộc vào một thanh cố định. Đĩa tròn được thả cho chuyển động từ trạng thái nghỉ theo phương thẳng đứng. Hãy chứng minh (a) lực căng dây bằng $1/3$ trọng lượng của đĩa, (b) gia tốc của đĩa bằng $2g/3$, (c) tốc độ của khối tâm của đĩa là $(4gh/3)^{1/2}$ sau khi đĩa đi xuống được một khoảng h . (d) Xác minh câu trả lời của bạn cho phần (c) bằng cách sử dụng các định luật về năng lượng.



20. Một tấm ván có khối lượng $M = 6.00 \text{ kg}$ nằm trên hai con lăn hình trụ cứng giống hệt nhau có $R = 5.00 \text{ cm}$ và $m = 2.00 \text{ kg}$. Tấm ván được kéo bởi một lực không đổi theo phương ngang \vec{F} có độ lớn 6.00 N tác dụng vào phần cuối của tấm ván và vuông góc với trục của các con lăn (các trục này song song với nhau). Các con lăn này lăn không trượt trên mặt phẳng và cả trên tấm ván. (a) Hãy tìm gia tốc ban đầu của tấm ván tại thời điểm các con lăn cách đều nhau từ các đầu của tấm ván. (b) Tìm gia tốc của các con lăn tại thời điểm đó. (c) Hãy tìm các lực ma sát tác dụng khi đó?

