

# Chương 4: Chuyển động trong không gian hai chiều

**H**iều biết về các cơ sở của chuyển động trong không gian 2 chiều (từ đây gọi tắt là chuyển động hai chiều) sẽ cho chúng ta (trong các chương sau) khảo sát các tình huống khác nhau, từ chuyển động của các vệ tinh trên quỹ đạo đến chuyển động của các electron trong điện trường đều. Chúng ta sẽ bắt đầu nghiên cứu chi tiết hơn về bản chất vec-tơ của vị trí, vận tốc và gia tốc. Sau đó sẽ xử lý chuyển động ném nghiêng và chuyển động tròn đều như là các trường hợp đặc biệt của chuyển động hai chiều. Chúng ta cũng sẽ thảo luận về khái niệm chuyển động tương đối.

## 4.1 Các vec-tơ vị trí, vận tốc và gia tốc

### 4.1.1 Vec-tơ độ dời

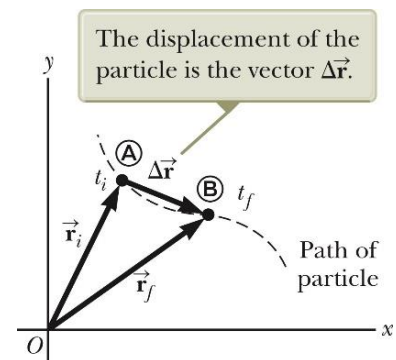
Trong chương 2, ta đã thấy rằng chuyển động của một chất điểm theo một đường thẳng sẽ được xác định hoàn toàn nếu vị trí của nó được biết đến như là một hàm của thời gian. Bây giờ ta sẽ mở rộng ý tưởng này sang chuyển động 2 chiều của một chất điểm trong mặt phẳng xy. Ta bắt đầu bằng việc mô tả vị trí của một chất điểm bằng vec-tơ vị trí  $\vec{r}$ , vẽ từ gốc của một hệ tọa độ đến vị trí của hạt trong mặt phẳng xy (hình 4.1).

Tại thời điểm  $t_i$ , vị trí của chất điểm là ở A, được mô tả bởi vec-tơ  $\vec{r}_i$ , tại thời điểm  $t_f$ , vị trí của chất điểm là B, được mô tả bởi vec-tơ  $\vec{r}_f$ . Quỹ đạo của chất điểm là đoạn cong AB.

**Vec-tơ độ dời** của chất điểm được định nghĩa là **hiệu của vec-tơ vị trí ở thời điểm cuối và vec-tơ vị trí ở thời điểm đầu của chất điểm.**

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (4.1)$$

Như vậy động học chuyển động hai chiều (2 chiều hoặc 3 chiều), mọi thứ đều tương tự như trong chuyển động một chiều ngoại trừ việc ta phải sử dụng trọn vẹn cách biểu diễn vec-tơ.



Hình 4.1 Vec-tơ độ dời  $\Delta\vec{r}$  của chất điểm dịch chuyển từ điểm A đến B trên mặt phẳng xy

### 4.1.2 Vận tốc trung bình:

Vận tốc trung bình bằng vec-tơ độ dời chia cho khoảng thời gian thực hiện độ dời đó. Hướng của vận tốc trung bình là hướng của vec-tơ độ dời.

$$\vec{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

### 4.1.3 Vận tốc tức thời:

Vận tốc tức thời là giới hạn của vận tốc trung bình khi  $\Delta t$  tiến tới không (tức là bằng đạo hàm của vec-tơ độ dời theo thời gian).

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.3)$$

Vận tốc tức thời tại mỗi điểm trên quỹ đạo của chất điểm có phương là phương tiếp tuyến với quỹ đạo và có chiều là chiều chuyển động.

Độ lớn của vận tốc tức thời được gọi là tốc độ. Tốc độ là một đại lượng vô hướng.

### 4.1.4 Gia tốc trung bình

Gia tốc trung bình của một chất điểm chuyển động được định nghĩa bằng độ biến thiên của vận tốc tức thời chia cho khoảng thời gian diễn ra sự biến thiên đó.

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (4.4)$$

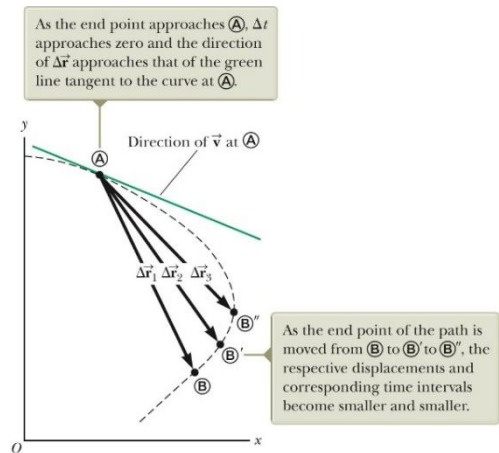
Gia tốc trung bình là một đại lượng vec-tơ cùng hướng với  $\Delta \vec{v}$ .

### 4.1.5 Gia tốc tức thời:

Gia tốc tức thời là giới hạn khi  $\Delta t$  tiến đến không của  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.5)$$

Gia tốc tức thời bằng đạo hàm theo thời gian của vec-tơ vận tốc.



Hình 4.2 Vận tốc tức thời tại điểm A có phương là đường tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm A.

**Câu hỏi 4.1:** Xét các vật điều khiển trong 1 ô tô gồm: bàn đạp ga, phanh, tay lái. Trong 3 vật này, vật nào gây ra gia tốc cho xe? (a) Cả 3 vật, (b) bàn đạp ga và phanh, (c) phanh, (d) bàn đạp ga, và (e) tay lái.

## 4.2 Chuyển động hai chiều với gia tốc không đổi

### 4.2.1 Các phương trình động học trong chuyển động hai chiều:

Nếu một chuyển động hai chiều có gia tốc không đổi, ta có thể tìm được một hệ phương trình để mô tả chuyển động đó. Các phương trình này tương tự như các phương trình động học trong chuyển động thẳng.

Có thể mô hình hóa chuyển động trong không gian 2 chiều như là hai chuyển động *độc lập* trong từng hướng gắn với các trục x và y. *Lưu ý*: tác động lên chuyển động theo trục y không ảnh hưởng đến chuyển động theo trục x.

#### Các phương trình động học:

Vec-tơ vị trí của một chất điểm chuyển động trong mặt phẳng xy là

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (4.6)$$

Vec-tơ vận tốc của chất điểm được xác định bởi:

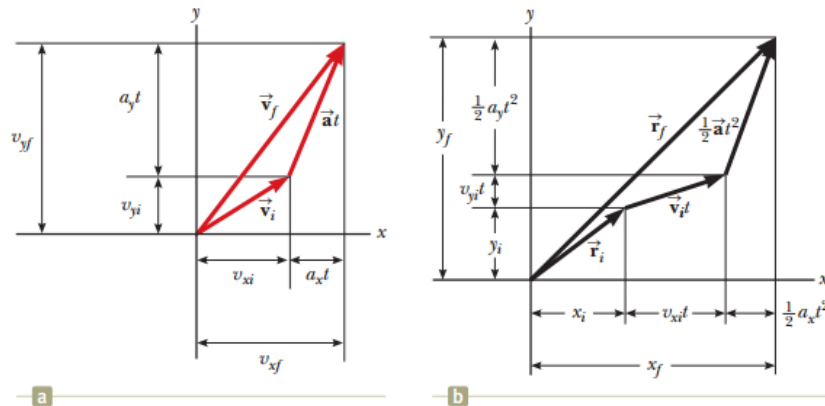
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (4.7)$$

Vì gia tốc của chất điểm là hằng số nên ta tìm được biểu thức của vận tốc như là hàm của thời gian:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \quad (4.8)$$

Vị trí của chất điểm cũng được biểu diễn như là hàm của thời gian:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad (4.9)$$



Hình 4.3 Biểu diễn các thành phần của vec-tơ (a) vị trí, (b) vận tốc trong chuyển động hai chiều có gia tốc không đổi

#### Bài tập mẫu 4.1:

Một chất điểm di chuyển trên mặt phẳng xy. Tại thời điểm  $t = 0$  nó bắt đầu rời gốc tọa độ với thành phần vận tốc ban đầu theo phương x là 20 m/s và theo phương y là –

15 m/s. Chất điểm chuyển động với gia tốc theo phương x bằng  $4 \text{ m/s}^2$ . (A) Xác định biểu thức vec-tơ vận tốc của chất điểm theo thời gian. (B) Tính vận tốc và tốc độ của chất điểm tại thời điểm  $t = 5 \text{ s}$  và góc hợp bởi vec-tơ vận tốc với trục x.

**Giải:**

(A) Từ dữ liệu đề bài cho, ta có  $v_{xi} = 20 \text{ m/s}, v_{yi} = -15 \text{ m/s}, a_x = 4 \text{ m/s}^2$  và  $a_y = 0$ .

Ta có  $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t = (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j} = (20 + 4t)\hat{i} + (-15 + 0.t)\hat{j}$

Vậy biểu thức vec-tơ vận tốc theo thời gian là:  $\vec{v}_f = (20 + 4t)\hat{i} - 15\hat{j} \text{ (m/s)}$

(B) Tại thời điểm  $t = 5 \text{ s}$ , thay  $t = 5 \text{ s}$  và biểu thức trên ta được vec-tơ vận tốc tại thời điểm 5 s:  $\vec{v}_f = (20 + 4 \times 5)\hat{i} - 15\hat{j} = (40\hat{i} - 15\hat{j}) \text{ (m/s)}$

Tốc độ của chất điểm tại  $t = 5 \text{ s}$ :  $|\vec{v}_f| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} = 43 \text{ m/s}$

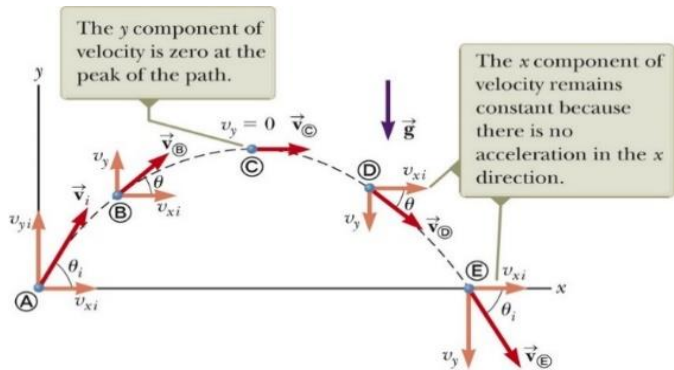
Góc hợp bởi vec-tơ vận tốc theo thời gian là:  $\theta = \arctan\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \arctan\left(\frac{-15}{40}\right) = -21^\circ$

### 4.3 Chuyển động ném nghiêng

Một vật có thể đồng thời chuyển động theo hai trục x và y. Trong phần này, ta xem xét chuyển động ném nghiêng. Phân tích chuyển động ném nghiêng của một vật sẽ đơn giản nếu chấp nhận 2 giả định:

- Gia tốc rơi tự do là hằng số trong phạm vi chuyển động và hướng xuống dưới (giống như là quả đất là phẳng trong phạm vi khảo sát, điều này là hợp lý nếu phạm vi này là bé so với bán kính của Quả đất).
- Bỏ qua sức cản của không khí.

**Phân tích chuyển động ném nghiêng:** Xét một chất điểm được ném nghiêng từ gốc tọa độ với vận tốc ban đầu  $\vec{v}_i$  có phương hợp với phương ngang một góc  $\theta_i$ . Với 2 giả định nêu trên, quỹ đạo của chất điểm luôn là một parabol như trong hình 4.4. Ở điểm cao nhất của quỹ đạo, vận tốc theo phương thẳng đứng bằng 0. Gia tốc luôn bằng  $g$  tại mọi điểm trên quỹ đạo.



Hình 4.4 Quỹ đạo parabol của chất điểm được ném nghiêng 1 góc  $\theta_i$  từ gốc tọa độ với vận tốc ban đầu  $v_i$

Cụ thể, chúng ta sẽ đi **thiết lập phương trình chuyển động** của chất điểm trên theo 2 phương x và y. Chuyển động của chất điểm là tổng hợp của các chuyển động theo phương x và y. Vị trí của chất điểm tại thời điểm bất kỳ cho bởi:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (4.10)$$

Với hệ tọa độ chọn như hình 4.4, ta có:

- Tọa độ ban đầu của chất điểm  $(x_i, y_i) = (0, 0)$ .
- Vận tốc ban đầu của chất điểm là  $\vec{v}_i$  chiếu theo hệ tọa độ đã chọn như trên hình 4.4 ta có các thành phần của vận tốc ban đầu của chất điểm là: 
$$\begin{cases} v_{xi} = +v_i \cos\theta_i \\ v_{yi} = +v_i \sin\theta_i \end{cases}$$
- Gia tốc của chất điểm  $\vec{a} = \vec{g}$ , chiếu theo hệ tọa độ hình 4.4 thì  $\vec{g}$  cùng phương và ngược chiều với Oy nên ta có các thành phần gia tốc: 
$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$
- Vận tốc tại thời điểm  $t$  của chất điểm: 
$$\begin{cases} v_{xf} = v_{xi} + a_x t = +v_i \cos\theta_i \\ v_{yf} = v_{yi} + a_y t = +v_i \sin\theta_i - gt \end{cases} \quad (4.11)$$
- Phương trình (4.11) được gọi là **phương trình vận tốc của chất điểm**, nó cho ta biết vận tốc của chất điểm ở thời điểm  $t$  bất kỳ.

Từ những phân tích trên ta viết được:

- Theo phương  $x$ :  $a_x = 0$  và  $v_{xi} = \text{const}$  nên chất điểm chuyển động thẳng đều với vận tốc  $v_{xi} = v_i \cos\theta_i$ . Từ biểu thức (4.10), ta viết được phương trình chuyển động của chất điểm theo phương  $x$  ứng với hệ tọa độ đã chọn như hình 4.4 như sau:
- $x_f = x_i + v_{xi} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 0 + v_i \cos\theta_i \cdot t + 0 = v_i \cos\theta_i \cdot t \quad (4.12)$
- Theo phương  $y$ :  $a_y = -g = \text{const}$  nên theo phương  $y$  chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều với vận tốc ban đầu  $v_{yi} = +v_i \sin\theta_i$ . Từ biểu thức (4.10), ta viết được phương trình chuyển động của chất điểm theo phương  $y$  ứng với hệ tọa độ đã chọn như hình 4.4 như sau:

$$y_f = y_i + v_{yi} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2 = 0 + v_i \sin\theta_i \cdot t + \frac{1}{2} (-g) t^2 = v_i \sin\theta_i \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.13)$$

Hệ phương trình (4.12) và (4.13) được gọi là **phương trình chuyển động của chất điểm ném nghiêng**. Từ hệ phương trình này, ta biết được vị trí của chất điểm tại một thời điểm  $t$  bất kỳ.

Bây giờ, chúng ta có thể khử  $t$  ở 2 phương trình trên để thu được phương trình tọa độ  $y$  phụ thuộc  $x$  như sau: từ (4.12) ta suy ra biểu thức thời gian chuyển động của chất điểm  $t = \frac{x_f}{v_i \cos\theta_i}$  rồi thế vào phương trình (4.13), ta được:

$$y_f = v_i \sin\theta_i \cdot \frac{x_f}{v_i \cos\theta_i} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x_f}{v_i \cos\theta_i} \right)^2 = x_f \cdot \tan\theta_i - \frac{1}{2} \frac{g}{v_i^2 (\cos\theta_i)^2} \cdot x_f^2 \quad (4.14)$$

Phương trình (4.14) được gọi là **phương trình quỹ đạo của chất điểm**. Nhìn vào phương trình này ta chứng tỏ được rằng chất điểm chuyển động theo **quỹ đạo parabol**.

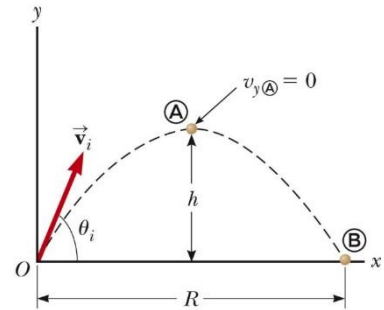
Lưu ý: các phương trình (4.12), (4.13) và (4.14) được xây dựng dựa trên hệ tọa độ được chọn như hình 4.4. Dấu của các thành phần trong các phương trình (4.12), (4.13) và (4.14) có thể sẽ thay đổi khác nếu ta chọn hệ tọa độ khác với hình 4.4. Nhưng phương trình quỹ đạo

của những chất điểm chuyển động ném nghiêng vẫn là phương trình bậc 2 của y phụ thuộc x theo quỹ đạo parabol.

**Câu hỏi 4.2:** (i) Giả sử một vật chuyển động ném nghiêng với quỹ đạo parabol như hình 4.4, tại điểm nào trên quỹ đạo của vật vec-tơ vận tốc và vec-tơ gia tốc vuông góc với nhau? (a) không có điểm nào, (b) điểm cao nhất, (c) điểm xuất phát. (ii) Với cùng lựa chọn như trên, hỏi điểm nào trên quỹ đạo của vật vec-tơ vận tốc và vec-tơ gia tốc song song với nhau?

**Tầm xa và độ cao cực đại của vật ném nghiêng:**

Khi phân tích chuyển động ném nghiêng ta thường quan tâm đến hai đặc trưng: **tầm xa R** (là khoảng cách xa nhất theo phương ngang so với vị trí ban đầu) và **độ cao cực đại h** (là khoảng cách xa nhất theo phương đứng so với vị trí ban đầu) mà vật đạt được (hình 4.5).



Hình 4.5 Tại điểm A, chất điểm đạt độ cao cực đại. Tại điểm B, chất điểm đạt vị trí xa nhất theo phương ngang.

- **Độ cao cực đại h:** Khi chất điểm đi đến điểm A – vị trí đạt độ cao cực đại, vận tốc theo phương y của nó bằng 0. Từ phương trình (4.11), cho  $v_y = 0$ , ta suy ra thời gian mà chất điểm đi từ O đến A là:  $t_A = \frac{v_i \sin \theta_i}{g}$ . Thay  $t_A$  vào phương trình chuyển động (4.13), ta thu được biểu thức độ cao cực đại của chất điểm:

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g} \quad (4.15)$$

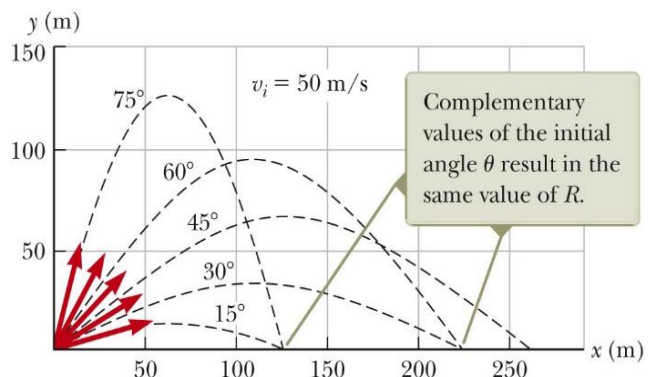
- **Tầm xa R:** Khi chất điểm đến điểm B – vị trí đạt khoảng cách xa nhất theo phương ngang, tọa độ y của chất điểm bằng 0. Từ phương trình (4.14), cho  $y = 0$  ta suy ra biểu thức tính thời gian chất điểm đi từ O đến B. Cách khác, đối với bài toán ta đang xét, ta thấy  $t_B = 2t_A$ . Thay  $t_B$  vào phương trình (4.12) ta thu được biểu thức tính tầm xa:

$$R = v_i \cos \theta_i \cdot t_B = v_i \cos \theta_i \cdot 2 \cdot \frac{v_i \sin \theta_i}{g}$$

$$\rightarrow R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \quad (4.16)$$

*Lưu ý: Các kết quả này (4.15) và (4.16) chỉ đúng trong trường hợp chuyển động là đối xứng. Trong trường hợp độ cao ban đầu và độ cao cuối cùng của vật khác nhau thì phải tính bằng các công thức khác.*

Từ các kết quả trên, ta xét trường hợp các góc bắn  $\theta$  phụ nhau. Cụ thể như hình 4.6, nó mô tả quỹ đạo của một vật ném nghiêng được bắn từ góc tọa độ với cùng tốc độ ban đầu



Hình 4.6 Quỹ đạo của một vật ném nghiêng được bắn từ góc tọa độ với cùng tốc độ ban đầu 50 m/s nhưng các góc bắn khác nhau.



50 m/s nhưng với các góc bắn khác nhau. Từ các công thức ở trên và quan sát hình 4.6, ta có thể kết luận:

- Tầm xa đạt được là như nhau ứng với các góc phụ nhau.
- Với góc  $\theta = 45^\circ$  thì tầm xa là cực đại.
- Với các góc  $\theta$  khác nhau thì độ cao và thời gian vật chuyển động trong không trung là khác nhau.

---

**Câu hỏi 4.3:** Hãy sắp xếp các góc bắn như trên hình 4.6 theo thứ tự thời gian bay từ nhỏ nhất đến lớn nhất.

---

**Bài tập mẫu 4.2:**

Một vận động viên nhảy xa như hình 4.7 rời khỏi mặt đất tại góc  $20^\circ$  so với phương ngang với tốc độ ban đầu 11 m/s. (a) Anh ta nhảy được 1 đoạn bao xa theo phương ngang? (b) Độ cao cực đại mà anh ta đạt được?



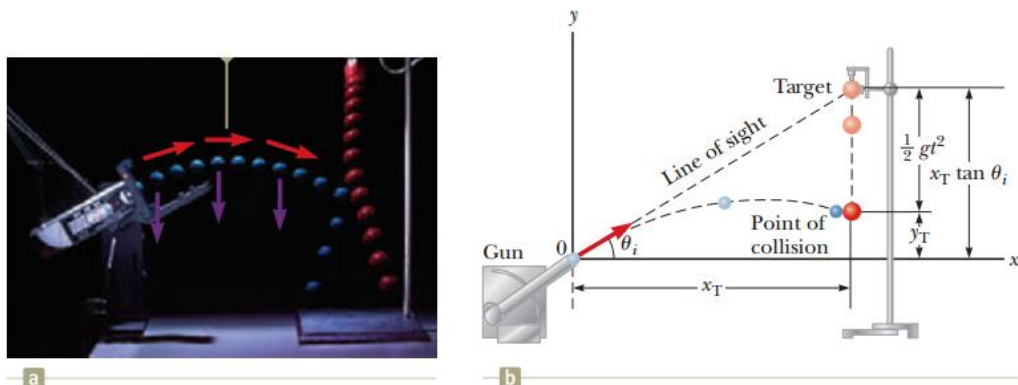
Hình 4.7 Bài tập mẫu 4.2

**Giải:**

Bài toán hoàn toàn giống trường hợp chấ điểm mà chúng ta xét ở trên. Nên ta có thể áp dụng biểu thức (4.15) và (4.16) để tính.

**Bài tập mẫu 4.3:**

Một viên đạn bắn ra từ khẩu súng nhắm vào 1 mục tiêu. Cùng lúc đó một viên bi rơi tự do từ trạng thái nghỉ từ mục tiêu (hình 4.8). Hãy chứng tỏ rằng nếu khẩu súng nhắm thẳng vào mục tiêu tĩnh (Target – trên hình 4.8) thì viên đạn sẽ đụng phải viên bi rơi tự do (như hình 4.8a).



Hình 4.8 Bài tập mẫu 4.3

**Giải:**

Chọn hệ tọa độ như hình 4.8b, gốc tọa độ đặt tại vị trí viên đạn rời khỏi nòng súng. Gọi  $x_T$  là khoảng cách từ gốc tọa độ đến mục tiêu theo phương x. Khẩu súng nhắm thẳng mục tiêu nên viên đạn bay ra với vận tốc ban đầu  $\vec{v}_i$  hợp với phương ngang 1 góc  $\theta_i$ . Vậy ta tính được khoảng cách từ điểm viên đạn rời khỏi nòng súng đến mục tiêu theo phương y là  $x_T \cdot \tan\theta_i$ .

Phương trình chuyển động của viên đạn: 
$$\begin{cases} x_{fĐ} = v_i \cos\theta_i \cdot t \\ y_{fĐ} = v_i \sin\theta_i \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Gọi  $t_T$  là thời gian viên đạn chuyển động từ gốc tọa độ đến điểm có tọa độ theo phương x bằng  $x_T$ . Từ phương trình chuyển động của nó ta suy ra:

$$\begin{cases} x_{fĐ} = v_i \cos\theta_i \cdot t_T = x_T \rightarrow t_T = \frac{x_T}{v_i \cos\theta_i} \\ y_{fĐ} = v_i \sin\theta_i \cdot t_T - \frac{1}{2}gt_T^2 = x_T \tan\theta_i - \frac{1}{2}gt_T^2 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình chuyển động của viên bi: 
$$\begin{cases} x_{fB} = x_T \\ y_{fB} = x_T \cdot \tan\theta_i - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Sau thời gian  $t_T$  thì tọa độ theo phương y của viên bi là  $y_{fB} = x_T \cdot \tan\theta_i - \frac{1}{2}gt_T^2$  (2)

Từ (1) và (2) ta thấy sau 1 khoảng thời gian  $t_T$  thì viên đạn và viên bi có cùng tọa độ ( $x_{fB} = x_{fĐ} = x_T$ ;  $y_{fB} = y_{fĐ}$ ). Điều đó chứng tỏ nếu khẩu súng nhắm thẳng vào mục tiêu tính thì viên đạn sẽ đụng phải viên bi rơi tự do như đề bài yêu cầu.

**Bài tập mẫu 4.4:**

Một hòn đá được ném với tốc độ ban đầu 20 m/s từ đỉnh của một tòa nhà cao 45m so với mặt đất với góc ném ban đầu  $\theta_i = 30^\circ$  so với phương ngang. (A) Sau bao lâu hòn đá chạm đất? (B) Tìm tốc độ của hòn đá lúc vừa chạm đất.

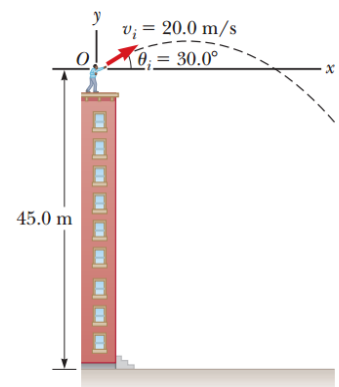
**Giải:**

Chọn hệ tọa độ như hình 4.9 với gốc tọa độ gắn với vị trí hòn đá bắt đầu rời khỏi tay người.

(A) Theo đề bài ta có:  $(x_i, y_i) = (0, 0)$ ,  $v_i = 20 \text{ m/s}$ ,  $\theta_i = 30^\circ$

Ta viết được phương trình chuyển động của hòn đá:

$$\begin{cases} x_f = v_i \cos\theta_i \cdot t = 20 \cos 30^\circ \cdot t \\ y_f = v_i \sin\theta_i \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 20 \sin 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2}9.8t^2 \end{cases}$$



Hình 4.9 Bài tập mẫu 4.4



Khi hòn đá chạm đất:  $y_f = 20\sin 30^\circ \cdot t - \frac{1}{2}9.8t^2 = y_D = -45$

Giải phương trình bậc 2 trên ta tìm được thời gian hòn đá chạm đất là  $t = 4.22s$ .

(B) Phương trình vận tốc của hòn đá:  $\begin{cases} v_{xf} = v_i \cos \theta_i \\ v_{yf} = v_i \sin \theta_i - gt \end{cases}$

Từ câu (a) ta đã tính được thời gian hòn đá chạm đất, thế vào phương trình vận tốc ta sẽ tính được các vận tốc thành phần khi hòn đá vừa chạm đất:

$$\begin{cases} v_{xf} = v_i \cos \theta_i = 20 \cos 30^\circ = 17.3 \\ v_{yf} = v_i \sin \theta_i - gt = 20 \sin 30^\circ - 9.8 \times 4.22 = -31.3 \end{cases}$$

Vận tốc độ của hòn đá lúc vừa chạm đất là:  $v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = 35.8 \left(\frac{m}{s}\right)$

### 4.4 Chuyển động tròn đều

Chuyển động tròn đều diễn ra khi một vật chuyển động theo một đường tròn với tốc độ không đổi.

Trong chuyển động này, vec-tơ vận tốc (với độ lớn không đổi) luôn tiếp tuyến với quỹ đạo của vật, hướng của vận tốc luôn thay đổi. Vì vậy vật có gia tốc là do sự thay đổi *hướng* của vận tốc.

Xét một ô tô được xem là một chất điểm chuyển động dọc theo quỹ đạo tròn như hình 4.10a.

Từ hình các vec-tơ  $\vec{r}$  và  $\vec{v}$  vẽ như trên hình 4.10b và 4.10c ta suy ra tỷ số:  $\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{r} \rightarrow |\Delta \vec{v}| = v \frac{|\Delta \vec{r}|}{r}$ , với  $v = v_i = v_f$  và  $r = r_i = r_f$ .

Từ đó tính được gia tốc trung bình khi chất điểm đi từ A đến B:

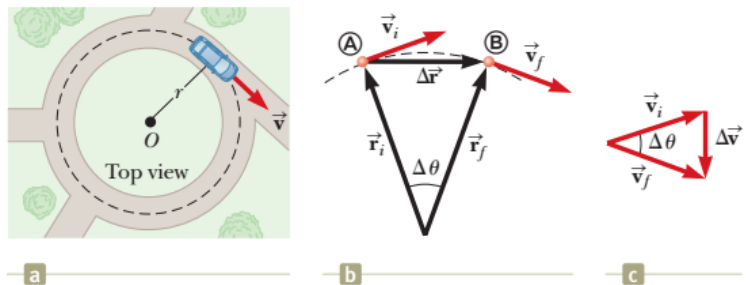
$$|\vec{a}_{avg}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{|\Delta t|} = v \frac{|\Delta \vec{r}|}{r \Delta t}$$

Khi A và B như trên hình 4.10b cực kỳ gần nhau, tức là  $\Delta t \rightarrow 0$  ta thu được độ lớn gia tốc tức thời:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (4.17)$$

Gia tốc  $a_c$  gọi là **gia tốc hướng tâm** của chất điểm chuyển động tròn đều. Hướng của gia tốc này hướng về phía tâm của quỹ đạo.

*Chu kỳ:* Chu kỳ  $T$  là thời gian cần để vật đi hết một vòng.



Hình 4.10 (a) Một ô tô đang đi dọc theo quỹ đạo tròn với tốc độ không đổi. (b) Khi xe chuyển động từ A đến B trên đường tròn, vec-tơ vận tốc của nó là  $\vec{v}_i$  và  $\vec{v}_f$  tương ứng. (c) Hướng của vec-tơ vận tốc từ khi xe đi từ A đến B và độ biến thiên vận tốc hướng về tâm đường tròn.

Tốc độ của chất điểm chính là tỉ số giữa chu vi của đường tròn với chu kỳ, nên chu kỳ được định nghĩa là:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (4.18)$$

Ngược với chu kỳ là tần số quay (rotation rate) được đo bằng số vòng quay trong 1 giây. Khi chất điểm quay được 1 vòng tròn tương ứng góc  $2\pi$  rad, tích của  $2\pi$  và tần số quay được gọi là tốc độ góc  $\omega$  của chất điểm, được đo bằng  $rad/s$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.19)$$

Kết hợp phương trình (4.18) và (4.19) ta có phương trình liên hệ giữa tốc độ góc  $\omega$  và tốc độ dài  $v$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v \quad \rightarrow \quad v = r\omega \quad (4.20)$$

Như vậy, ta có biểu thức khác của gia tốc hướng tâm:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} \quad \rightarrow \quad a_c = \omega^2 r \quad (4.21)$$

**Câu hỏi 4.4:** Một chất điểm chuyển động theo quỹ đạo tròn bán kính  $r$ , tốc độ  $v$ . Sau đó nó được tăng tốc lên tốc độ  $2v$  trên cùng quỹ đạo tròn đó. (i) Gia tốc hướng tâm của nó tăng bao nhiêu lần? (a) 0.25, (b) 0.5, (c) 2, (d) 4, (e) không xác định được. (ii) Cùng các lựa chọn như trên, chu kỳ của chất điểm tăng bao nhiêu lần?

#### Bài tập mẫu 4.5:

- (A) Xác định gia tốc hướng tâm của Trái đất khi nó chuyển động xung quanh Mặt trời. Xem như quỹ đạo của Trái đất quanh Mặt trời là quỹ đạo tròn. Biết khoảng cách từ tâm Trái đất đến Mặt trời là  $1.496 \times 10^{11} m$  và chu kỳ quay của Trái đất là 365 ngày.  
 (B) Xác định tốc độ góc của Trái đất khi nó chuyển động xung quanh Mặt trời.

#### Giải:

Gia tốc hướng tâm của Trái đất khi nó chuyển động xung quanh Mặt trời:

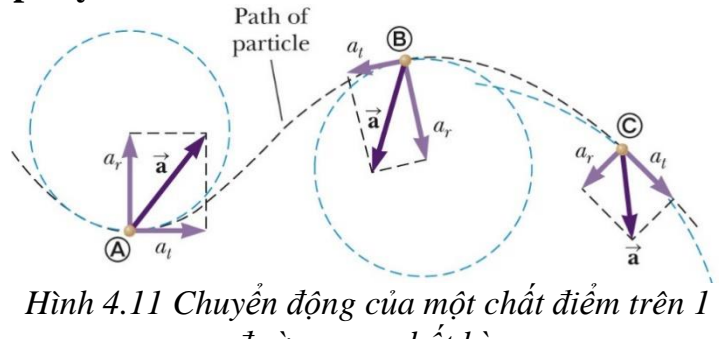
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 1.496 \times 10^{11}}{(365 \times 24 \times 3600)^2} = 5.93 \times 10^{-3} m/s^2$$

Tốc độ góc của Trái đất khi nó chuyển động xung quanh Mặt trời

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.99 \times 10^{-7} rad/s$$

### 4.5 Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến

Khảo sát một chuyển động tổng quát hơn chuyển động trong phần 4.4. Một chất điểm chuyển động về phía bên phải theo một đường cong, vận tốc của nó thay đổi cả về hướng và độ lớn (hình 4.11).



Hình 4.11 Chuyển động của một chất điểm trên 1 đường cong bất kỳ.

Xét sự thay đổi về độ lớn của vector vận tốc: **Gia tốc tiếp tuyến  $\vec{a}_t$**  gây ra sự thay đổi về tốc độ của chất điểm. Gia tốc tiếp tuyến cùng phương với vector vận tốc (phương tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm đang xét) và có độ lớn cho bởi:

$$a_t = \left| \frac{dv}{dt} \right| \quad (4.22)$$

Chiều của vector gia tốc tiếp tuyến  $\vec{a}_t$  sẽ cùng chiều với  $\vec{v}$  nếu chất điểm chuyển động nhanh dần và ngược chiều với  $\vec{v}$  nếu chất điểm chuyển động chậm dần.

Xét sự thay đổi về phương của vector vận tốc: **Gia tốc pháp tuyến  $\vec{a}_r$**  gây ra sự thay đổi về phương của vector vận tốc của chất điểm. Gia tốc pháp tuyến có phương vuông góc với vector vận tốc (phương pháp tuyến), chiều hướng về phía tâm quỹ đạo, độ lớn chính bằng độ lớn gia tốc hướng tâm:

$$|a_r| = \frac{v^2}{r} \quad (4.23)$$

Như vậy, tại một điểm bất kỳ trên quỹ đạo, chất điểm chuyển động chịu tác động của **gia tốc toàn phần**:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r \quad (4.24)$$

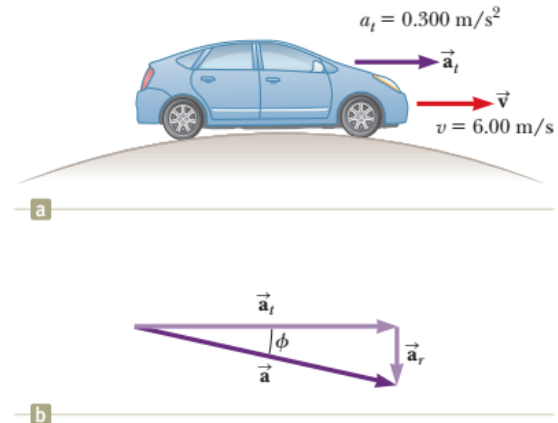
Độ lớn của gia tốc toàn phần:  $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

Do phương của vector gia tốc pháp tuyến hướng về tâm của quỹ đạo nên phương của vector gia tốc toàn phần cũng luôn hướng về phía lõm của quỹ đạo.

**Câu hỏi 4.5:** Một chất điểm chuyển động dọc theo một quỹ đạo với tốc độ tăng theo thời gian. (i) Với quỹ đạo nào sau đây vector vận tốc và vector gia tốc của chất điểm song song nhau? (a) Quỹ đạo tròn, (b) quỹ đạo thẳng, (c) quỹ đạo parabol, (d) không phải 3 quỹ đạo trên. (ii) Cùng các lựa chọn trên, quỹ đạo nào có vector vận tốc và vector gia tốc của chất điểm vuông góc nhau?

**Bài tập mẫu 4.6:**

Một ô tô rời khỏi đỉnh dốc với một gia tốc  $0.3 \text{ m/s}^2$  có phương song song với mặt đường (hình 4.12a). Bán kính cong của dốc là  $500 \text{ m}$ . Tại thời điểm xe ở ngay đỉnh dốc, vec-tơ vận tốc có độ lớn  $6 \text{ m/s}$  và phương ngang. Xác định phương, chiều và độ lớn của gia tốc toàn phần của xe tại đỉnh dốc.



Hình 4.12 Ví dụ 4.6

**Giải:**

Tại đỉnh dốc, ta vẽ được các vec-tơ gia tốc tiếp tuyến, pháp tuyến và toàn phần như hình 4.12b.

Với  $a_t = 0.3 \text{ m/s}^2$ ,  $v = 6 \text{ m/s}$  suy ra  $|a_r| = \frac{v^2}{r} = 0.072 \text{ m/s}^2$

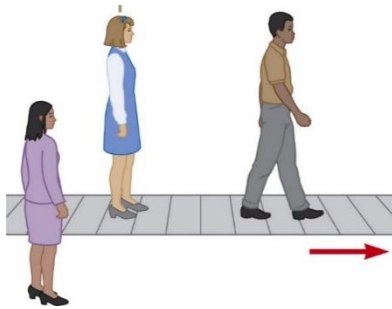
Từ đó ta tính được độ lớn gia tốc toàn phần:  $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = 0.31 \text{ m/s}^2$

Vec-tơ gia tốc toàn phần hợp với phương ngang 1 góc:  $\phi = \arctan\left(\frac{|a_r|}{a_t}\right) = 13.5^\circ$

Chiều của vec-tơ gia tốc toàn phần hướng về phía lõm quỹ đạo (như hình 4.12b).

**4.6 Vận tốc tương đối và gia tốc tương đối**

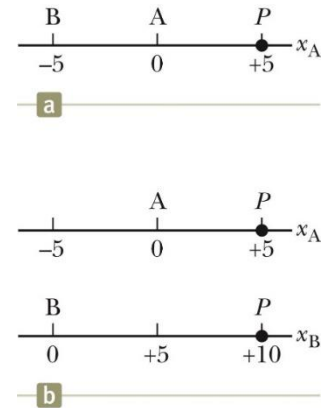
Một số ví dụ chuyển động tương đối, tức là khi xét chuyển động của 1 vật đối với các hệ quy chiếu khác nhau.



Hình 4.14 Tốc độ của người đàn ông đi bộ trên băng tải sẽ khác nhau đối với người phụ nữ đứng yên trên băng tải và người phụ nữ đứng yên trên mặt đất.

Ví dụ như trên hình 4.13, một quan sát viên nếu đứng ở A sẽ đo được vị trí của P là  $+5 \text{ m}$  (so với gốc tọa độ gắn với A) còn nếu anh ta đứng ở B thì vị trí đo được là  $+10 \text{ m}$ .

Một ví dụ khác, như hình 4.14, Một người đàn ông đang đi bộ trên một băng tải. Người phụ nữ đứng trên băng tải sẽ thấy người đàn ông chuyển động với tốc độ bình thường. Người phụ nữ đứng yên trên mặt đất sẽ thấy người đàn ông chuyển động với tốc độ lớn hơn nhiều. Đó là tổng hợp tốc độ của băng tải và tốc độ đi bộ. Sự khác biệt này là do vận tốc tương đối của các hệ quy chiếu của họ.

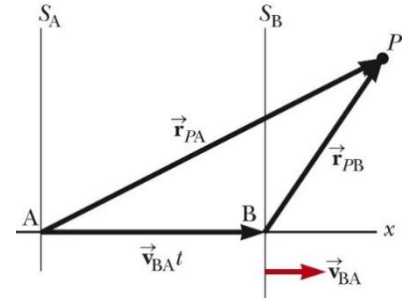


Hình 4.13 Ví dụ về chuyển động tương đối

**Vận tốc tương đối:**

Gọi  $S_A$  là hệ quy chiếu đứng yên.  $S_B$  là hệ quy chiếu chuyển động sang phải so với  $S_A$  với vận tốc là  $\vec{v}_{BA}$ . Thời điểm  $t = 0$ , được chọn làm gốc thời gian, là lúc gốc tọa độ của hai hệ quy chiếu trùng nhau.

Vị trí chất điểm P đối với hệ quy chiếu  $S_A$  là  $\vec{r}_{PA}$  và đối với hệ quy chiếu  $S_B$  là  $\vec{r}_{PB}$  như hình 4.15. Sau khoảng thời gian  $t$ , hệ quy chiếu  $S_B$  chuyển động được 1 đoạn  $AB = v_{BA} \cdot t$  so với  $S_A$ . Ta có thể viết  $\vec{AB} = \vec{v}_{BA} \cdot t$ .



Hình 4.15 Vị trí chất điểm P đối với 2 hệ quy chiếu  $S_A$  và  $S_B$ .

Quan sát hình 4.15, sử dụng công thức cộng vec-tơ, ta thu được  $\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{AB}$

Như vậy, vị trí của vật trong hai hệ quy chiếu có quan hệ với nhau thông qua vận tốc:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{v}_{BA} \cdot t \quad (4.25)$$

Lấy đạo hàm phương trình này theo thời gian, ta được phương trình cộng vận tốc:

$$\vec{u}_{PA} = \vec{u}_{PB} + \vec{v}_{BA} \quad (4.26)$$

Trong đó:  $\vec{u}_{PA}$  là vận tốc của P đo bởi quan sát viên A (gắn với hệ quy chiếu  $S_A$ );  $\vec{u}_{PB}$  là vận tốc của hạt P đo bởi quan sát viên B (gắn với hệ quy chiếu  $S_B$ ).

Các phương trình (4.25) và (4.26) được gọi là các **phương trình của phép biến đổi Galileo**.

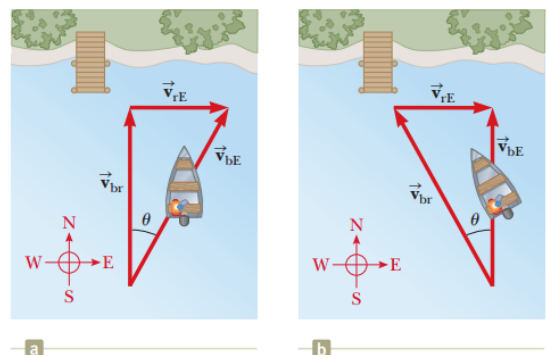
**Gia tốc trong các hệ quy chiếu khác nhau:**

Đạo hàm phương trình vận tốc (4.26) sẽ cho ta phương trình của gia tốc:  $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$ . Do vận tốc của hệ quy chiếu B không đổi nên gia tốc của nó bằng 0.

Vậy, gia tốc của chất điểm đo bởi quan sát viên trong một hệ quy chiếu sẽ bằng gia tốc đo bởi quan sát viên trong hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc không đổi so với hệ quy chiếu thứ nhất.

**Bài tập mẫu 4.7:**

Một con thuyền băng qua một con sông rộng với tốc độ 10 km/h so với nước. Nước trên sông chảy đều với tốc độ 5 km/h theo hướng đông so với bờ. (A) Thuyền hướng mũi theo hướng bắc, hãy xác định vận tốc của thuyền so với người quan sát đứng trên bờ ngay vị trí thuyền rời đi. (B) Nếu con thuyền cũng di chuyển cùng tốc độ 10 km/h so với nước và nó muốn đến điểm đối diện bên kia bờ dọc theo hướng bắc thì nó phải đi như thế nào? (hình 4.16)



Hình 4.16 Bài tập mẫu 4.7

**Giải:**

Đầu tiên ta cần xác định chất điểm ở đây chính là con thuyền, hệ quy chiếu đứng yên

$S_A$  là hệ quy chiếu gắn với người quan sát đứng trên bờ, hệ quy chiếu chuyển động  $S_B$  là hệ quy chiếu gắn với nước (sông).

(A) Gọi vận tốc của thuyền so với bờ là  $\vec{v}_{bE}$  (vận tốc của chất điểm đối với hệ quy chiếu đứng yên), vận tốc của thuyền so với nước là  $\vec{v}_{br}$  (vận tốc của chất điểm đối với hệ quy chiếu chuyển động), vận tốc của nước so với bờ là  $\vec{v}_{rE}$  (vận tốc tương đối giữa 2 hệ quy chiếu).

Theo đề bài, ta có  $v_{br} = 10 \text{ km/h}$ ,  $v_{rE} = 5 \text{ km/h}$ . Yêu cầu bài toán cần xác định  $\vec{v}_{bE}$ .

Áp dụng công thức cộng vận tốc (4.26) ta được:  $\vec{v}_{bE} = \vec{v}_{br} + \vec{v}_{rE}$  (1)

Chiếu các vec-tơ trên hình 4.16a của phương trình (1) lên phương x (phương đông) và phương y (phương bắc), ta được:

$$\begin{cases} v_{bEx} = 0 + v_{rE} \\ v_{bEy} = v_{br} + 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{bE} = \sqrt{v_{rE}^2 + v_{br}^2} = 11.2 \text{ km/h} \\ \theta = \arctan \frac{v_{rE}}{v_{br}} = 26.6^\circ \end{cases}$$

Vậy đối với người quan sát đứng trên bờ sẽ thấy thuyền bị trôi theo hướng đông bắc, theo phương hợp với phương bắc 1 góc  $26.6^\circ$ , tốc độ của thuyền so với người này là  $11.2 \text{ km/h}$ .

(B) Vì dòng nước chảy về hướng đông nên nếu muốn thuyền đến được điểm đối diện ở bờ bên kia là hướng bắc thì thuyền phải hướng mũi về phía tây bắc, theo phương hợp với phương bắc 1 góc  $\theta$  như hình 4.16b.

Ta cũng có công thức cộng vận tốc:  $\vec{v}_{bE} = \vec{v}_{br} + \vec{v}_{rE}$  (2)

Chiếu các vec-tơ trên hình 4.16a của phương trình (2) lên phương x (phương đông) và phương y (phương bắc), ta được:

$$\begin{cases} v_{bEx} = -v_{brx} + v_{rEx} \\ v_{bEy} = v_{bry} + v_{rEy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -v_{brx} + v_{rEx} \\ v_{bE} = v_{bry} + v_{rEy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = -v_{br} \sin \theta + v_{rE} \\ v_{bE} = v_{br} \cos \theta + 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 = -10 \sin \theta + 5 \\ v_{bE} = 10 \cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta = 30^\circ \\ v_{bE} = 8.66 \text{ km/h} \end{cases}$$

Vậy để thuyền đến được điểm đối diện ở bờ bên kia là hướng bắc thì thuyền phải hướng mũi về phía tây bắc, theo phương hợp với phương bắc 1 góc  $\theta = 30^\circ$ .

## Tóm tắt chương 4

### Định nghĩa:

Vec-tơ độ dời bằng hiệu của vec-tơ vị trí ở thời điểm cuối và vec-tơ vị trí ở thời điểm đầu của chất điểm.

$$\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (4.1)$$



Vận tốc trung bình bằng độ dời của chất điểm chia cho thời gian thực hiện độ dời đó.

$$\vec{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

Vận tốc tức thời là đạo hàm của vec-tơ độ dời theo thời gian.

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.3)$$

Gia tốc trung bình bằng độ biến thiên của vận tốc tức thời chia cho khoảng thời gian diễn ra sự biến thiên đó.

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (4.4)$$

Gia tốc tức thời là đạo hàm của vec-tơ vận tốc theo thời gian.

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.5)$$

Chuyển động ném nghiêng: là chuyển động của một vật được ném vào không khí gần bề mặt Trái đất. Chuyển động này được phân tích thành 2 chuyển động theo 2 phương độc lập nhau: theo phương x vật chuyển động thẳng đều và theo phương y vật chuyển động biến đổi đều với độ lớn gia tốc theo phương y bằng g – gia tốc trọng trường.

**Khái niệm và nguyên lý:**

Nếu một chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều tức là chuyển động với gia tốc không đổi  $a = \text{const}$  thì vec-tơ vận tốc và vec-tơ vị trí tại mỗi thời điểm t bất kỳ là:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \quad (4.8)$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2 \quad (4.9)$$

Mô hình chất điểm chuyển động tròn đều: chất điểm chuyển động dọc theo 1 đường tròn, bán kính r, với tốc độ không đổi  $v = \text{const}$  thì gia tốc của chất điểm có phương vuông góc với vec-tơ vận tốc, chiều hướng về tâm của đường tròn, gọi là gia tốc hướng tâm:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (4.17)$$

Chu kỳ và tốc độ góc của chất điểm chuyển động theo quỹ đạo tròn được cho bởi:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (4.18)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.19)$$

Chất điểm chuyển động theo quỹ đạo cong bất kỳ, gia tốc toàn phần của chất điểm là tổng hợp của gia tốc tiếp tuyến  $a_t$  gây ra sự thay đổi về độ lớn của vec-tơ vận tốc và gia tốc pháp tuyến  $a_r$  gây ra sự thay đổi về phương của vec-tơ vận tốc. Biểu thức của các gia tốc như các biểu thức sau:

$$a_t = \left| \frac{dv}{dt} \right| \quad (4.22)$$

$$|a_r| = \frac{v^2}{r} \quad (4.23)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r \quad (4.24)$$

Khi xét chuyển động của một vật so với hệ quy chiếu đứng yên  $S_A$  và so với hệ quy chiếu  $S_B$  chuyển động thẳng đều so với  $S_A$ , ta sử dụng *phương trình cộng vận tốc*:

$$\vec{u}_{PA} = \vec{u}_{PB} + \vec{v}_{BA} \quad (4.26)$$

Với  $\vec{u}_{PA}$  là vận tốc của vật so với hệ quy chiếu  $S_A$ ,  $\vec{u}_{PB}$  là vận tốc của vật so với hệ quy chiếu  $S_B$ ,  $\vec{v}_{BA}$  vận tốc của  $S_B$  so với  $S_A$ .

### Câu hỏi lý thuyết chương 4

1. Nếu bạn biết vector vị trí của chất điểm tại 2 điểm dọc theo đường đi của nó và cũng biết khoảng thời gian nó di chuyển từ điểm này đến điểm khác thì bạn có thể xác định vận tốc tức thời và vận tốc trung bình của của chất điểm không? Giải thích.
2. Ném 1 vật theo phương tạo với phương ngang 1 góc  $\theta$  với vận tốc ban đầu  $v_i$ , bỏ qua lực cản không khí. (a) Vật đó có chuyển động rơi tự do không? (b) Gia tốc của nó theo phương đứng? (c) Gia tốc của nó theo phương ngang?
3. Vẽ giản đồ vận tốc và gia tốc của vật tại mỗi điểm dọc theo quỹ đạo của nó trong trường hợp (a) vật được ném theo phương ngang, (b) vật được ném theo phương tạo với phương ngang 1 góc  $\theta$ .
4. Giải thích các chất điểm có gia tốc hay không trong các trường hợp (a) chất điểm chuyển động dọc theo đường thẳng với vận tốc không đổi và (b) chất điểm chuyển động trên một đường cong với tốc độ không đổi.

### Bài tập chương 4

- Một tài xế mô-tô đi về phía nam với tốc độ 20 m/s mất 3 phút, sau đó vòng qua phía tây với tốc độ 25 m/s mất 2 phút và cuối cùng anh ta đi theo hướng tây bắc với tốc độ 30 m/s trong 1 phút. Trong 6 phút di chuyển trên, hãy tìm vector độ dời tổng hợp, tốc độ trung bình và vận tốc trung bình của xe. Chọn chiều dương trục x là hướng đông.

ĐS:  $\vec{r} = -4.27\vec{i} + -2.33\vec{j}$  (km);  $v = 13.5$  m/s;  $v_{arg} = 23.33$  m/s.

- Khi mặt trời chiếu trực diện qua đỉnh đầu (12h trưa), một con chim điều hâu lao thẳng xuống đất với tốc độ không đổi 5 m/s theo phương tạo với phương ngang 1 góc 60°. Tính tốc độ cái bóng của nó di chuyển trên mặt đất.

ĐS: 2.5 m/s

- Đánh 1 quả bóng golf từ điểm phát bóng nằm ở cuối ngọn đồi. Vị trí của quả bóng được cho bởi phương trình  $x = 18t$  và  $y = 4t - 4.9t^2$  (m;s). (a) Viết biểu thức vec-tơ vị trí của quả bóng dưới dạng vec-tơ đơn vị  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ . Xác định (b) hàm vec-tơ vận tốc theo thời gian và (c) vec-tơ gia tốc theo thời gian (d) Xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của quả bóng tại  $t = 3$  s.

- Một con cá bắt đầu bơi từ vị trí  $\vec{r}_i = (10\vec{i} - 4\vec{j})$  m trong mặt phẳng ngang với vận tốc đầu  $\vec{v}_i = (4\vec{i} + \vec{j})$  m/s. Sau khi nó bơi được 20s với gia tốc không đổi, vận tốc nó là  $\vec{v}_f = (20\vec{i} - 5\vec{j})$  m/s. (a) Xác định các thành phần gia tốc của con cá. (b) Xác định phương, chiều của vec-tơ gia tốc so với vec-tơ đơn vị  $\vec{i}$ . (c) Nếu con cá vẫn giữ nguyên gia tốc không đổi thì nó ở đâu và di chuyển theo chiều nào lúc  $t = 25$ s?

ĐS: (a) 0.8 m/s<sup>2</sup> và -0.3 m/s<sup>2</sup>; (b) -20.6°; (c) -15.2°

- Một xe trượt tuyết ban đầu ở vị trí (29m, 95°) (xét trong hệ tọa độ cực) chuyển động với vận tốc (4.5 m/s, 40°). Nó chuyển động với gia tốc không đổi (1.9 m/s<sup>2</sup>, 200°). Sau 5s, hãy tính vận tốc và vec-tơ vị trí của nó xét trong hệ tọa độ Decartes.

ĐS:  $\vec{v}_f = (3.45 - 1.79t)\vec{i} + (2.89 - 0.65t)\vec{j}$  (m/s)

$\vec{r}_f = (-2.53 + 3.45t - 0.893t^2)\vec{i} + (28.9 + 2.89t - 0.325t^2)\vec{j}$  m

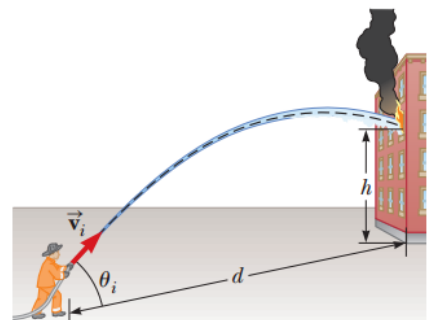
- Một phi hành gia đang ở trên một hành tinh lạ. Cô thực hiện cú nhảy với tốc độ ban đầu 3m/s, tầm xa lớn nhất đo được là 15 m. Hỏi gia tốc rơi tự do ở hành tinh này là bao nhiêu?

ĐS: 0.6 m/s<sup>2</sup>

- Bắn một viên đạn đại bác vào sườn núi với vận tốc ban đầu 300 m/s với góc bắn 55° so với phương ngang hướng lên phía trên. Sau 42 s thì viên đạn chạm vào sườn núi và phát nổ. Xác định tọa độ của viên đạn tại điểm chạm sườn núi so với vị trí ban đầu của nó.

ĐS: 7230 m, 1680 m.

- Anh lính cứu hỏa đứng cách tòa nhà đang cháy một khoảng  $d = 20$  m, nước phun ra từ vòi tạo 1 góc ban đầu

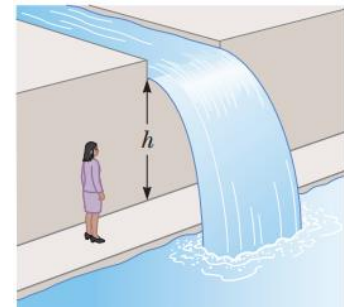


Hình câu 8

$\theta_i = 45^\circ$  so với mặt đất (hình). Tốc độ ban đầu của vòi nước đạt  $v_o = 20 \text{ m/s}$ . Hãy xác định độ cao  $h$  - nơi bị cháy của tòa nhà so với mặt đất.

ĐS: 10 m

9. Một kiến trúc sư xây dựng đang thiết kế một thác nước nhân tạo trong công viên thành phố. Vận tốc nước chảy theo phương ngang khi rời khỏi kênh đạt  $1,7 \text{ m/s}$  sẽ đổ xuống. Biết độ cao của kênh so với mặt hồ là  $h = 2,35 \text{ m}$ . (a) Không gian bên dưới thác nước có đủ cho 1 khách bộ hành đi qua không? (b) Để bán được kế hoạch này cho hội đồng thành phố, cô kiến trúc sư muốn xây dựng mô hình có tỷ lệ 1:12. Hỏi tốc độ nước chảy khỏi kênh là bao nhiêu trong mô hình đó?



Hình câu 9

ĐS: (b)  $v = 0.5 \text{ m/s}$

10. Ném một vật lên phía trên từ đỉnh đồi có độ cao  $h$  so với mực nước biển với vận tốc ban đầu  $v_i$  có phương hợp với phương ngang một góc  $\theta$ . (a) Tìm khoảng thời gian để vật lên đến độ cao cực đại theo  $v_i, g, \theta$ . (b) Tìm biểu thức tính độ cao cực đại  $h_{max}$  mà vật đạt được theo  $v_i, g, \theta$  và  $h$ . (c) Viết phương trình quỹ đạo của vật theo  $v_i, g, \theta$  và  $h$ .



Hình câu 11

11. Một vận động viên ném tạ quay một cái đĩa nặng  $1 \text{ kg}$  với bán kính cong  $1,06 \text{ m}$ . Tốc độ tối đa đĩa đạt được  $20 \text{ m/s}$ . Xác định gia tốc pháp tuyến tối đa của đĩa.

ĐS:  $377 \text{ m/s}^2$

12. Vệ tinh Westar VI quay quanh trái đất với quỹ đạo tròn và cách bề mặt trái đất  $600 \text{ km}$ . Biết gia tốc rơi tự do ở độ cao của vệ tinh là  $8,21 \text{ m/s}^2$ , bán kính trái đất  $6400 \text{ km}$ . Xác định tốc độ của vệ tinh và chu kỳ quay của vệ tinh trên.

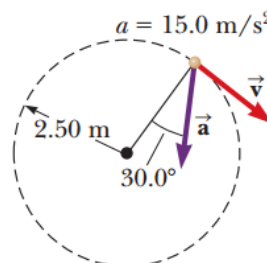


Hình câu 12

ĐS:  $T = 96,7$  phút

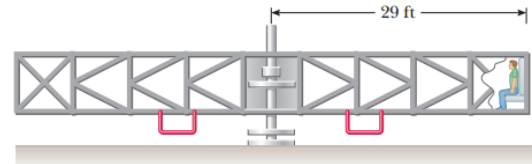
13. Hình câu 13 biểu diễn gia tốc tổng hợp tại một thời điểm xác định của chất điểm chuyển động theo quỹ đạo tròn thuận chiều kim đồng hồ với bán kính quỹ đạo  $2,5 \text{ m}$ . Tại thời điểm đó, tìm (a) gia tốc pháp tuyến, (b) tốc độ và (c) gia tốc tiếp tuyến của chất điểm.

ĐS:  $13 \text{ m/s}^2; 5,7 \text{ m/s}; 7,5 \text{ m/s}^2$



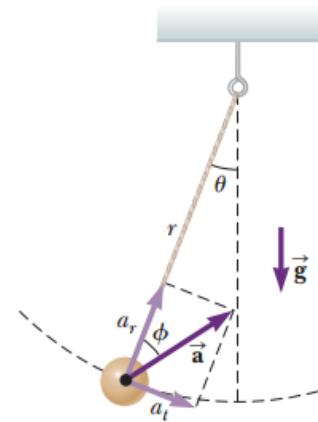
Hình câu 13

14. Máy ly tâm 20-g tại trung tâm nghiên cứu Ames thuộc Nasa, California là một ống hình trụ đường kính 58 ft như hình. Giả sử một nhà du hành đang được huấn luyện ngồi trên ghế tại điểm cách trục quay 29 ft. Xác định tốc độ quay cần thiết để nhà du hành đạt gia tốc hướng tâm 20g.



Hình câu 14

15. Một con lắc vật lý có chiều dài  $r = 1\text{ m}$  đu đưa trong mặt phẳng thẳng đứng. Khi con lắc ở vị trí  $\theta = 90^\circ$  và  $\theta = 270^\circ$ , tốc độ của nó là 5 m/s. (a) Xác định độ lớn của gia tốc pháp tuyến và gia tốc tiếp tuyến tại từng vị trí. (b) Hãy vẽ giản đồ vec-tơ xác định chiều của gia tốc toàn phần tại 2 vị trí. (c) Xác định độ lớn và chiều của gia tốc toàn phần tại hai vị trí trên.
16. Một máy bay đang bay với tốc độ 630 km/h so với không khí đến thành phố cách nó 750 km về phía bắc. Thời gian máy bay bay đến thành phố mất bao lâu nếu (a) máy bay bay ngược chiều gió đang thổi với tốc độ 35 km/h theo hướng nam so với mặt đất, (b) máy bay bay xuôi chiều gió đang thổi với cùng tốc độ theo hướng bắc so với mặt đất, (c) máy bay bay trong gió đang thổi theo hướng đông so với mặt đất với tốc độ 35 km/h.



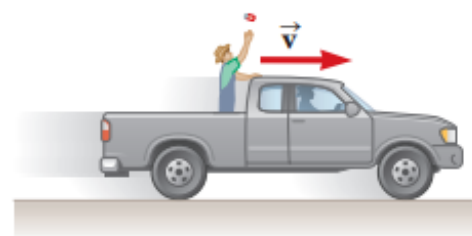
Hình câu 15

ĐS: 1.26 h; 1.13 h; 1.19 h.

17. Dòng sông đang trôi đều với tốc độ 0.5 m/s. Một sinh viên đang bơi xuôi dòng một đoạn 1km rồi bơi trở về điểm xuất phát. (a) Nếu sinh viên có thể bơi với tốc độ 1.2 m/s trong nước tĩnh, thì bạn đó mất bao nhiêu thời gian cho hành trình trên? (b) Giả sử với cùng đoạn đường trên mà mặt nước tĩnh, thì bạn đó bơi mất bao lâu? (c) Tại sao thời gian bơi lâu hơn khi có vận tốc dòng chảy?

ĐS:  $2.02 \cdot 10^3\text{ s}$ ;  $1.67 \cdot 10^3\text{ s}$

18. Một xe bán tải di chuyển theo hướng đông với vận tốc không đổi 9.5 m/s trên 1 đoạn đường ngang dài vô hạn. Một cậu bé ở đằng sau xe ném 1 lon nước ngọt lên trên và chụp lại nó ở cùng 1 vị trí trên xe tải nhưng cách 1 đoạn 16 m so với mặt đường. Xét trong hệ quy chiếu gắn với xe, hãy xác định (a) góc ném mà cậu bé ném so với phương đứng, (b) tốc độ ban đầu của lon nước so với xe và (c) Quỹ đạo của lon nước mà cậu bé thấy. Một người đứng dưới đất dòm cậu bé ném lon nước. Trong hệ quy chiếu gắn với người đó, (d) hãy mô tả quỹ đạo chuyển động của lon nước và (e) tính vận tốc đầu của lon nước.

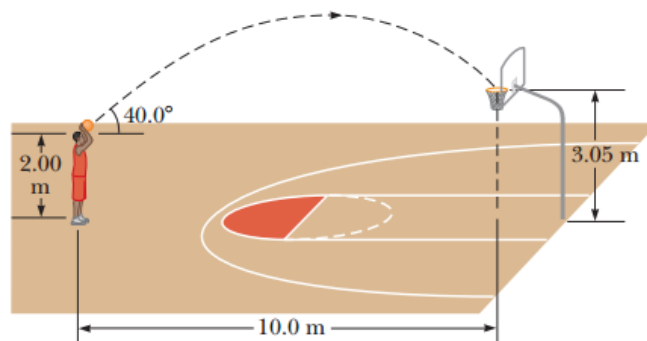


Hình câu 18

ĐS: 8.25 m/s; 12.6 m/s,  $41^\circ$  so với phương ngang

19. Hai vận động viên bơi lội Chris và Sarah bắt đầu bơi cùng lúc tại cùng một vị trí bờ bên này của 1 dòng suối rộng, biết vận tốc dòng chảy là  $v$ . Cả 2 di chuyển với cùng tốc độ  $c$  ( $c > v$ ) so với nước. Chris bơi xuôi dòng 1 đoạn  $L$  và sau đó bơi ngược chiều với cùng khoảng cách. Trong khi đó Sarah bơi hướng về bờ bên kia, vuông góc với chiều nước chảy. Sarah cũng bơi 1 đoạn  $L$  và sau đó quay trở lại vạch xuất phát. (a) Xác định thời gian bơi 1 vòng của Chris và Sarah theo  $L$ ,  $c$  và  $v$ . (b) Cho biết người nào quay trở lại vạch xuất phát trước?
20. Một cầu thủ bóng rổ đang đứng cách rổ 10m theo phương ngang. Chiều cao rổ 3.05 m và anh ta ném bóng dưới góc  $40^\circ$  so với phương ngang từ độ cao 2 m. (a) Xác định gia tốc của quả bóng tại điểm cao nhất của quỹ đạo. (b) Anh ta phải ném bóng với tốc độ bao nhiêu để bóng vào rổ mà không đập vào tấm bảng?

ĐS:  $9.8 \text{ m/s}^2$ ;  $10.7 \text{ m/s}$

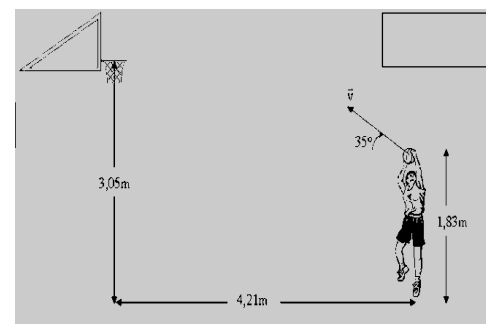


Hình câu 20

21. Một khẩu pháo rời khỏi nòng với tốc độ  $1000 \text{ m/s}$  bắn phá 1 sườn núi. Mục tiêu cách khẩu pháo  $2000 \text{ m}$  theo phương ngang và  $800 \text{ m}$  theo phương đứng. Hỏi khẩu pháo được bắn với góc hợp với phương ngang 1 góc bao nhiêu?

ĐS:  $22.4^\circ$  và  $89.4^\circ$

22. Một cầu thủ bóng rổ bị phạm lỗi khi cố gắng ném bóng vào rổ của đội bạn và được hưởng hai quả ném phạt. Theo phương nằm ngang từ tâm của rổ đến điểm ném phạt là  $4,21 \text{ m}$  và độ cao của rổ là  $3,05 \text{ m}$  tính từ mặt sân. Trong lần ném phạt thứ nhất cầu thủ ném quả bóng theo một góc  $35^\circ$  so với phương nằm ngang với vận tốc ban đầu  $v_0 = 4.88 \text{ m/s}$ . Khi bắt đầu rời khỏi tay cầu thủ thì quả bóng ở độ cao  $1.83 \text{ m}$  so với mặt sân. Lần ném này quả bóng không lọt vào rổ. Giả sử bỏ qua sức cản của không khí. (a) Độ xa bóng đạt được theo phương nằm ngang khi rơi chạm đất so với vị trí ban đầu của cầu thủ. (b) Trong lần ném phạt thứ hai độ cao ban đầu và góc nghiêng của quả bóng khi ném cũng vẫn giữ nguyên như trong lần ném đầu tiên tức là  $1.83 \text{ m}$  và  $35^\circ$ . Lần này quả bóng đi vào tâm rổ. Hỏi vận tốc ban đầu của quả bóng lần này là bao nhiêu?



Hình câu 22

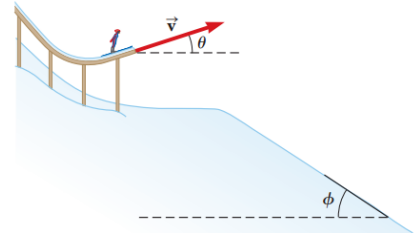
ĐS:  $3.8 \text{ m}$ ;  $8.71 \text{ m/s}$



23. Một máy bay ném bom đang lao xuống với tốc độ 280m/s theo phương tạo thành góc  $\theta$  so với phương ngang. Khi độ cao của máy bay đạt 2,15km so với mực nước biển, nó bắt đầu thả bom và quả bom rơi trúng vào mục tiêu dưới đất. Khoảng cách từ vị trí quả bom được thả đến mục tiêu là 3,25km. Xác định góc  $\theta$ .

ĐS: 33,5°

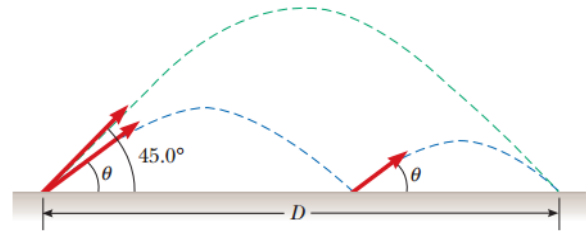
24. Một cậu bé bắt đầu rời đường trượt tuyết bằng cú nhảy với vận tốc 10 m/s (có phương hợp với phương ngang 1 góc  $\theta=15^\circ$ ). Góc nghiêng của đồi là  $\phi = 50^\circ$ , bỏ qua lực cản không khí. Xác định (a) khoảng cách từ vị trí cuối đường trượt đến vị trí chạm đất của cậu bé trên đồi, (b) các thành phần vận tốc của cậu bé lúc chạm đất. (c) Kết quả sẽ thế nào nếu có lực cản không khí?



Hình câu 24

ĐS: (a) 43.2 m ; (b) 9.66 và -25.6 m/s

25. Một cầu thủ sân ngoài ném quả bóng chày cho cầu thủ bắt bóng đang đứng trong phần gôn nhà, 2 cầu thủ cách nhau 1 khoảng D. Giả sử trong lần ném đầu, quả bóng nảy lên một lần trước khi đến chỗ cầu thủ bắt bóng và góc tạo bởi quả bóng sau lần nảy bằng với góc ném ban đầu  $\theta$  nhưng tốc độ quả bóng giảm 1 nửa sau khi nảy. Lần thứ 2 ném bóng với góc ban đầu  $45^\circ$  và không nảy lần nào.

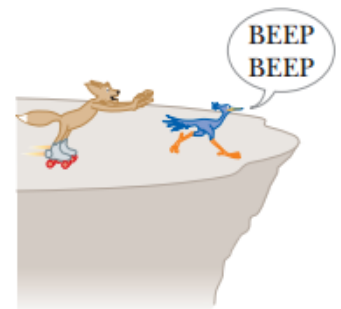


Hình câu 25

- (a) Giả sử các quả bóng được ném với cùng một vận tốc đầu và bỏ qua lực cản không khí. Góc  $\theta$  là bao nhiêu để trong cả 2 lần ném bóng đều đến vị trí cầu thủ bắt bóng. (b) Xác định tỷ số thời gian giữa 2 lần ném bóng.

ĐS: (a) 26.6°; (b) 0.95

26. Một con sói già không thể chạy nhanh để đuổi kịp con gà. Nó bèn mang một đôi giày trượt mà nhờ đó nó có thể đi với gia tốc theo phương ngang không đổi là  $15 \text{ m/s}^2$ . Con sói bắt đầu trượt từ vị trí cách mép vách đá 70 m, cũng tại đó con gà chạy vọt qua tiến về phía mép vách đá. (a) Xác định tốc độ tối thiểu con gà phải đạt được để đến được vách đá trước sói. (b) Tại mép vách đá, con gà thoát thân bằng cách đột ngột chạy vòng lại, trong khi sói tiếp tục tiến thẳng phía trước. Đôi giày của sói vẫn theo phương ngang và tiếp tục hoạt động trong khi sói bay trong không trung với gia tốc  $(15\vec{i} - 9,8\vec{j}) \text{ m/s}^2$ . Vách đá cao 100 m so với mặt đất. Xác định vị trí tiếp đất của sói theo phương đứng và các thành phần vận tốc của sói lúc đó.

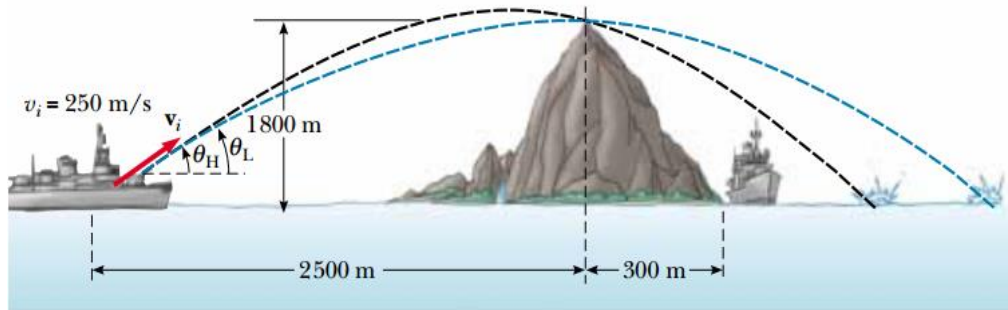


Hình câu 26

ĐS: (a) 22.9 m/s ; (b) 360 m ; 114 m/s ; -44,3 m/s.

27. Tàu của địch đang ở bên kia ngọn núi đá cao 1800 m so với mực nước biển. Tàu địch đã tiến đến vị trí các núi đá 1 đoạn 2500 m và bắt đầu bắn phá tàu của ta. Vận tốc đại bác của địch có thể đạt đến 250 m/s. Hãy xác định vị trí nào là an toàn cho tàu của ta, biết khoảng cách từ đỉnh núi đến chân núi là 300m.

ĐS: <math>270\text{ m}</math> hoặc <math>3.48 \cdot 10^3\text{ m}</math>



Hình câu 27