OLYMPIC VẬT LÝ SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XV
ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT - 2013

PHẦN GIẢI BÀI TẬP

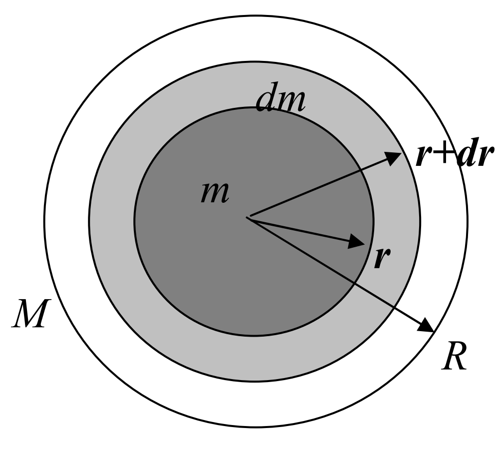
CÂU 1

Một lý thuyết cũ về bức xạ của Mặt trời cho rằng năng lượng bức xạ của Mặt trời có nguồn gốc là năng lượng hấp dẫn của nó và tính lượng nhiệt tỏa ra khi Mặt trời thu nhỏ lại với bán kính giảm từ R_1 đến R_2=0,9 R_1. Giả thiết rằng Mặt trời là một quả cầu đồng nhất có khối lượng riêng không phụ thuộc vào khoảng cách tới tâm Mặt trời. Hỏi lượng nhiệt đó đủ cho Mặt trời bức xạ trong bao nhiêu năm nếu cường độ của bức xạ Mặt trời là hằng số trong suốt thời gian Mặt trời thu nhỏ lại. Nhiệt độ của Mặt trời tăng thêm bao nhiêu nếu sự co lại đó diễn ra tức thời. Giả thiết rằng nhiệt dung riêng của vật chất tạo nên Mặt trời là 4,18 *kJ/kg.độ*.

Cho biết Mặt trời có: khối lượng là M=2.10^{30} *kg;* bán kính trung bình R_1=6,95.10^8 *m*; hằng số hấp dẫn G=6,67.10^{-11} $m^3/kg.s^2$; khoảng cách trung bình từ Mặt trời đến Quả đất là D=1,5.10^{11} *m*; hằng số Mặt trời A là năng lượng bức xạ của Mặt trời trong một đơn vị thời gian đi đến một đơn vị diện tích trên mặt phẳng đặt vuông góc với tia bức xạ và nằm ở khoảng cách xa Mặt trời bằng một đơn vị thiên văn (gần bằng khoảng cách trung bình giữa Mặt trời và Trái đất), A=1,39 kW/m^2 .

Bài giải

Ta tính năng lượng hấp dẫn của Mặt trời được coi như một quả cầu đồng nhất bán kính R, khối lượng riêng ρ. Thế năng hấp dẫn của lớp cầu khối lượng dm nằm giữa hai mặt cầu bán kính r và $r+dr$ có thể tích $4\pi r^2 dr$ nằm trong trường hấp dẫn của phần khối lượng m hình cầu thể tích $\frac{4\pi}{3}r^3$ (xem hình 1) là



Hình 1

$$dU = -G\frac{m\,dm}{r} = -\frac{(4\pi)^2}{3}G\rho^2 r^4 dr \quad .$$

Như vậy, năng lượng hấp dẫn (bằng thế năng hấp dẫn) của Mặt trời là

$$U = -G\frac{(4\pi)^2}{3}\rho^2\int_0^R r^4\, dr = -G\frac{(4\pi)^2}{3.5}\rho^2 R^5$$

$$= -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R} \quad . \qquad (1)$$

Ở đây, ta đã chọn thế năng hấp dẫn tại ∞ là bằng 0. Khi Mặt trời thu nhỏ lại, bán kính giảm từ R_1 đến R_2, nhiệt lượng tỏa ra bằng độ giảm của thế năng hấp dẫn $Q = \Delta U$

$$Q = \frac{3}{5}GM^2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \quad . \qquad (2)$$

Đặt các giá trị số vào (2), ta được $Q = 2{,}6.10^{40}\ J$.

Năng lượng Mặt trời bức xạ trong một năm ra không gian vũ trụ là

$$E_0 = 4\pi D^2 A\ .\ 3600\ .\ 24\ .\ 365 = 1{,}2.10^{34}\ J/\text{năm} \quad .$$

Do đó, nhiệt lượng Q đủ để bức xạ trong thời gian $\frac{Q}{E_0} = 2{,}17.10^6$ năm .

Nếu sự co xảy ra tức thời thì nhiệt độ Mặt trời tăng thêm

$$\Delta T = \frac{Q}{C_V M} = 3{,}1.10^6\ {}^oC \quad .$$

CÂU 2

Một tên lửa có khối lượng ban đầu M_0, phụt nhiên liệu ra với vận tốc không đổi $-u$ ($u > 0$) so với tên lửa. Theo Cơ học phi tương đối tính, mối liên hệ giữa khối lượng M của tên lửa và vận tốc v của nó trong hệ quy chiếu quán tính ban đầu khi nó đứng yên (hệ qui chiếu PTN) được cho bởi biểu thức

$$\frac{M}{M_0} = e^{\left(-\frac{v}{u}\right)} \quad .$$

1. Hãy dẫn ra công thức trên.
2. Giả thiết rằng vận tốc phụt ra của nhiên liệu bị giới hạn bởi điều kiện

$$0 \le u < c \quad ,$$

trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hãy dẫn ra biểu thức cho M / M_0 trong trường hợp tương đối tính. Trong điều kiện nào kết quả này quy về kết quả của Cơ học phi tương đối tính?
Vì tốc độ của tên lửa nhỏ so với tốc độ ánh sáng c nên có thể áp dụng Cơ học phi tương đối tính đối với chuyển động của tên lửa. Khối lượng của tên lửa được coi là rất lớn so với khối lượng nhiên liệu phụt ra.

Bài giải

1. Trường hợp không tương đối tính

Xét hệ qui chiếu khối tâm K của tên lửa trước khi phụt nhiên liệu tại thời điểm t. Tên lửa có khối lượng M và vận tốc bằng 0. Sau khoảng thời gian rất ngắn dt, ở thời điểm $t'=t+dt$, vận tốc của tên lửa trong hệ qui chiếu K là $d\vec{V}$. Khối lượng của tên lửa M thay đổi một lượng $dM<0$, còn khối lượng nhiên liệu phụt ra là $|dM|$. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng đối với hệ kín gồm tên lửa và khí phụt ra trong hệ qui chiếu K, ta có

$$[M+dM]\, d\vec{V} + \vec{u}\ |dM| \approx M\ d\vec{V}\ - \vec{u}\ dM = 0 \ , \qquad (1)$$

hay

$$M\, dV = -u\, dM \ . \qquad (2)$$

Ở đây, ta đã bỏ qua số hạng bậc hai của các vi phân.

Chuyển sang hệ quy chiếu PTN. Lúc ban đầu, $t=0$, tên lửa đứng yên trong hệ này. Tại thời điểm t, trước khi phụt khối lượng nhiên liệu $|dM|$, tên lửa chuyển động với vận tốc $\vec{v}$, khối lượng của tên lửa là $M(t)$. Ở thời điểm $t'=t+dt$, sau khi phụt khối lượng nhiên liệu $|dM|$, vận tốc của tên lửa tăng một lượng $d\vec{v}$. Độ tăng vận tốc tên lửa trong hệ qui chiếu khối tâm và trong hệ qui chiếu PTN bằng nhau, $d\vec{v} = d\vec{V}$ (điều này không đúng trong cơ học tương đối tính). Do đó, phương trình (2) được viết lại là

$$M\, dv = -u\, dM \quad .$$

Chú ý đến điều kiện ban đầu $v(t=0)=0$, phương trình này cho lời giải

$$\frac{M}{M_0} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{v}{u}\right)} \quad . \tag{3}$$

2. Trường hợp tương đối tính

Trong hệ qui chiếu khối tâm K, sau khoảng thời gian dt, khối lượng nhiên liệu phụt ra là dm, vận tốc của tên lửa là $d\vec{V}$ và khối lượng của nó là $M+dM$, $dM<0$. Định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn năng lượng cho ta các phương trình

$$(M + dM)d\vec{V} + \frac{dm}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{u} = 0 \quad , \tag{4}$$

$$Mc^2 = \frac{dm}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}c^2 + (M + dM)c^2 \quad . \tag{5}$$

Để nhận được các phương trình (4) và (5), ta đã lấy gần đúng

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{dV^2}{c^2}}} \approx 1 \quad .$$

Bỏ qua số hạng bậc hai của các vi phân, phương trình (4) quy về phương trình

$$-Md\vec{V} = \frac{dm}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{u} \quad , \tag{6}$$

còn phương trình (5) cho

$$-dM = \frac{dm}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad . \tag{7}$$

Kết hợp (6) và (7) ta nhận được phương trình tương tự trong trường hợp không tương đối tính (2)

$$Md\vec{V} = dM\vec{u} \qquad \text{hay} \qquad MdV = -u\, dM \tag{8}$$

Trong hệ qui chiếu PTN, vận tốc của tên lửa trước khi phụt nhiên liệu là $\vec{v}$, sau khi phụt là $\vec{v} + d\vec{v}$. Công thức chuyển vận tốc từ hệ qui chiếu K sang hệ qui chiếu PTN trong trường hợp tương đối tính cho ta

$$v + dv = \frac{dV + v}{1 + \frac{v}{c^2} dV} \quad . \tag{9}$$

Bỏ qua số hạng bé bậc hai của các vi phân, ta có

$$dV = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \tag{10}$$

Đặt (10) vào (8) ta có

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{11}$$

hay

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = -\frac{1}{2u}\left[\frac{dv}{1 - \frac{v}{c}} + \frac{dv}{1 + \frac{v}{c}}\right] \quad . \tag{12}$$

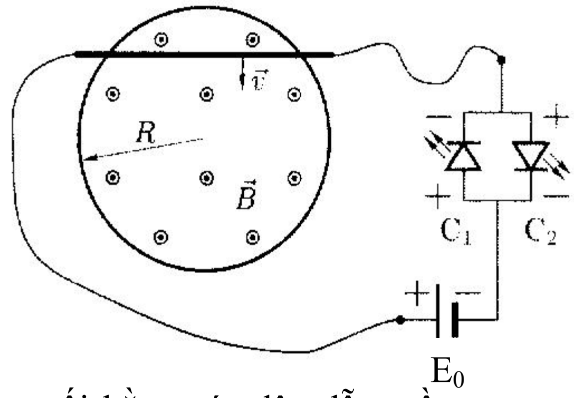
Tích phân (12) với điều kiện ban đầu $M = M_0$, $v = 0$ tại t=0 cho ta

$$\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right)^{\frac{c}{2u}} \tag{13}$$

với $\beta = \frac{v}{c}$. Nếu $\beta <<$ 1, sử dụng gần đúng $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$ khi x <<1, thì (13) trở về trường hợp không tương đối tính (3)

$$\frac{M}{M_0} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{v}{u}\right)} \quad .$$

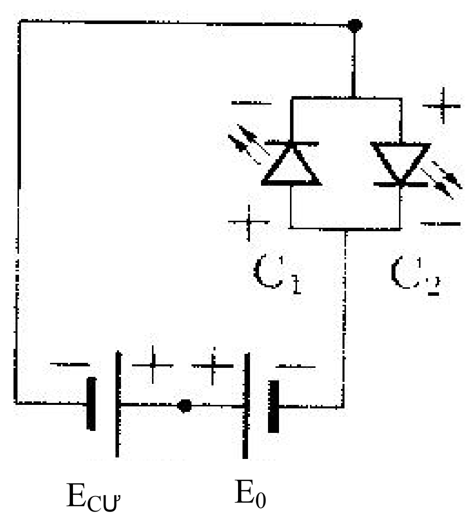
CÂU 3



Trong khe hở ở giữa hai cực tròn (bán kính $R = 5cm$) của một nam châm điện có một từ trường đều với cảm ứng từ $B = 1T$. Một thanh kim loại chuyển động trong khe trên với vận tốc không đổi $v = 10m/s$ (xem hình vẽ). Biết rằng thanh dài $2R$ và hai đầu của nó được nối bằng các dây dẫn mềm với một mạch gồm một nguồn điện có s.đ. đ. $E_0 = 0{,}5V$, và hai điốt C_1 và C_2 sẽ phát quang khi hiệu điện thế $|U| \geq 0{,}25V$ và có cực tính xác định như chỉ ra trên hình vẽ. Coi rằng ban đầu thanh tiếp xúc với vòng tròn (tức là bắt đầu chuyển động cắt ngang các đường sức từ). Hãy xác định điện áp $U(t)$ trên các quang điốt và tìm các thời điểm mà tại đó các điốt này sáng và tắt trong suốt khoảng thời gian thanh chuyển động trong từ trường ($0 \leq t \leq 2R/v$). Dựng phác đồ thị của hàm $U(t)$ và chỉ ra trên đó khoảng thời gian tắt của các điốt C_1 và C_2.

Bài giải

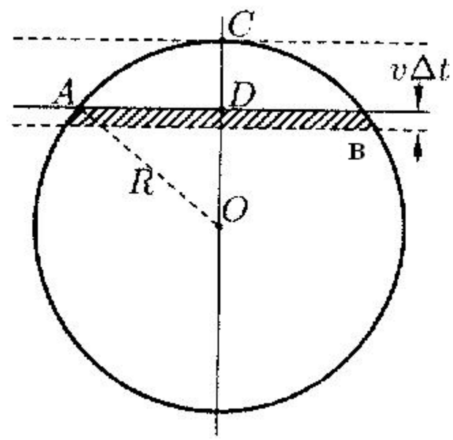
Khi thanh chuyển động trong từ trường, trong thanh xuất hiện s.đ.đ. cảm ứng $|E_{cư}| = \left|\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right|$. Độ lớn của s.đ.đ này phụ thuộc thời gian. Dấu của $E_{cư}$ có thể được xác định dựa vào biểu thức của lực Lorentz hoặc từ định luật cảm ứng điện từ của Faraday. Tóm lại, ta thu được sơ đồ mạch điện kín tương đương như trong hình 2. Lưu ý rằng $E_{cư}$ và E_0 mắc xung đối nhau. Bây giờ ta tìm sự phụ thuộc của $E_{cư}$ vào thời gian.



Hình 2

Theo điều kiện ban đầu, thanh tiếp xúc với biên của vùng có từ trường Tới thời điểm t , nó di chuyển được khoảng cách $CD = vt$ (xem hình 3). Dùng hình học dễ dàng tính được dây cung AB:

$$AB = 2AD = 2\sqrt{R^2 - (R - vt)^2} = 2\sqrt{vt\left(2R - vt\right)} \quad . \qquad (1)$$



Hình 3

Độ biến thiên từ thông trong thời gian Δt bằng $\Delta\phi = B.AB.v\Delta t$. Từ đây ta tìm được

$$|E_{cư}| = 2Bv\sqrt{vt\left(2R - vt\right)} \quad . \qquad (2)$$

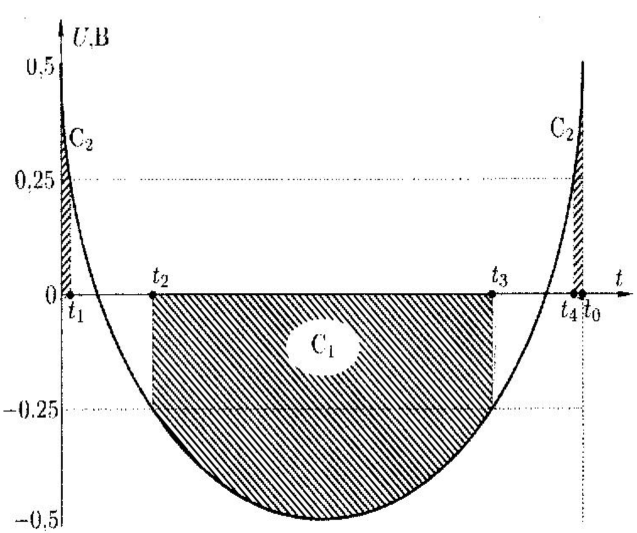
Dễ dàng thấy rằng s.đ.đ cảm ứng đạt cực đại khi $t = R / v$, và

$$|E_{cư}|_{max} = 2BvR = 1V \quad .$$

Từ đó

$$U(t) = E_0 - 2Bv\sqrt{vt\left(2R - vt\right)} \quad .$$

Đồ thị $U = U(t)$ có thể vẽ phác như ở hình 4.



Hình 4

Từ đồ thị ta thấy quang điốt C_2 sẽ phát sáng khi $U \geq 0,25V$ (theo đề bài), tức là trong 2 khoảng thời gian $[0,t_1]$ và $[t_4,t_0]$ trong đó $t_0 = 2R/v$. Còn quang điốt C_1 sẽ phát sáng khi $U \leq -0,25V$, tức là trong khoảng thời gian $[t_2,t_3]$.
Bây giờ chúng ta sẽ tìm các thời điểm t_1 và t_2. Các thời điểm t_3 và t_4 cũng sẽ tìm được từ tính đối xứng của đồ thị: $t_3 = t_0 - t_2$, $t_4 = t_0 - t_1$. Từ đồ thị ta thấy t_1 và t_4 là nghiệm của phương trình sau:

$$E_0 - 2Bv\sqrt{vt_{1,4}\left(2R - vt_{1,4}\right)} = 0,25 = \frac{1}{4} \quad ,$$

$$\left[\frac{E_0 - \frac{1}{4}}{2Bv}\right]^2 = 2Rvt_{1,4} - v^2 t_{1,4}{}^2 \qquad \text{hay} \qquad t_{1,4}^2 - \frac{2R}{v}t_{1,4}^2 + \frac{1}{v^2}\left(\frac{E_0 - \frac{1}{4}}{2Bv}\right)^2 = 1 \ .$$

Lưu ý rằng $|E_{cư}|_{max} = 2BvR = 1V$, còn $E_0 = 0,5V$. Thay vào phương trình trên và sau một số phép biến đổi đơn giản, ta được

$$t_{1,4}^2 - \frac{2R}{v}t_{1,4} + \frac{1}{16}\frac{R^2}{v^2} = 0 \qquad .$$

Giải ra ta được

$$t_{1,4} = \frac{R}{v}\left(1 \pm \sqrt{\frac{15}{16}}\right) = 5.10^{-3}(1 \pm 0,97)s \ .$$

Cụ thể là $t_1 = 150\mu s$ và $t_4 = 9,85ms$. Tương tự đối với t_2 và t_3, ta có

$$t_{2,3}^2 + \frac{2R}{v}t_{2,3} + \frac{1}{16}\frac{R^2}{v^2} = 0 \qquad .$$

Giải ra ta được

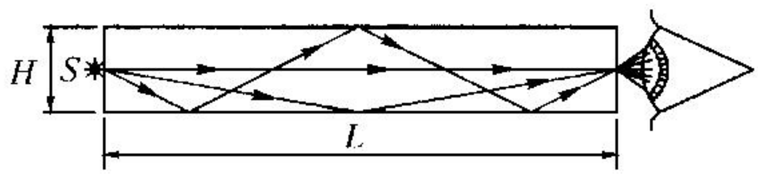
$$t_{2,3} = \frac{R}{v}\left(1 \pm \sqrt{\frac{7}{16}}\right) = 5.10^{-3}(1 \pm 0,66)s \qquad .$$

Cụ thể là $t_2 = 1,8ms$ và $t_3 = 8,35ms$.

CÂU 4

Gần sát đầu trái của một tấm trong suốt được đánh bóng tốt, có chiết suất *n*, có đặt một nguồn sáng S (xem hình vẽ). Cho bề dày của tấm $H = 1cm$ và chiều dài của tấm $L = 100cm$. Ánh sáng từ nguồn tới đầu trái của tấm dưới mọi góc từ $0 - 90^0$. Tới mắt người quan sát (ở đầu phải) có cả các tia sáng đi thẳng cũng như các tia sáng bị phản xạ toàn phần nhiều lần ở các mặt bên của tấm.

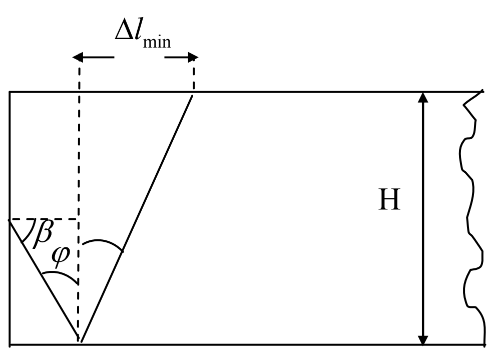
1. Hỏi tia phát ra từ nguồn và đi ra ở đầu phải của tấm có thể bị phản xạ toàn phần tối đa bao nhiêu lần? Giải bài toán trong hai trường hợp: a) $n = n_1 = 1,73$ và b) $n = n_1 = 1,3$.
2. Hãy cho biết trường hợp nào trong hai trường hợp nói ở trên, một phần ánh sáng đã đi ra mất qua các mặt bên.



Bài giải

Ta khảo sát sự truyền của tia sáng từ nguồn khúc xạ ở đầu trái của tấm (hình 5). Góc khúc xạ cực đại (β_{max}) ở mặt phẳng đầu trái ứng với góc tới $\alpha = 90^0$. Theo định luật khúc xạ, ta có:

$$1.\sin 90^0 = n\sin\beta_{max} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta_{max} = \frac{1}{n} \quad . \qquad (1)$$



Hình 5

Do vậy, góc tới cực tiểu ở mặt bên của tấm bằng

$$\varphi_{\min} = 90^0 - \beta_{max} \quad . \qquad (2)$$

Sự truyền của tia sáng trong tấm sẽ phụ thuộc vào tương quan giữa $\varphi_{\min}$ và góc giới hạn phản xạ toàn phần φ_{gh} ($\sin\varphi_{gh} = \frac{1}{n}$).

***1/ Trường hợp 1*.** Các tia sáng chỉ truyền trong tấm, không lọt ra mặt biên của tấm, nghĩa là tất cả các tia sáng đi vao đầu trái của tấm đều bị phản xạ toàn phần ở mặt bên, tức là

$$\varphi_{\min} \geq \varphi_{gh} \qquad \text{hay} \qquad \sin\varphi_{\min} \geq \sin\varphi_{gh} = \frac{1}{n} \quad . \qquad (3)$$

Mặt khác, theo (1) và (2), ta có

$$\sin\varphi_{\min} = \cos\beta_{max} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \quad .$$

Thay vào bđt (3), ta được

$$\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n^2 - 1} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad n \geq 2 \quad .$$

Rõ ràng điều kiện này được thỏa mãn chỉ với $n = n_1 = 1,73$. Từ đây ta dễ dàng tính được khoảng cách cực tiểu giữa hai điểm phản xạ trên hai biên:

$$(\Delta l)_{\min} = H\tan\varphi_{\min} = H\frac{\sin\varphi_{\min}}{\cos\varphi_{\min}} = H\frac{\frac{1}{n_1}\sqrt{n_1^2 - 1}}{\frac{1}{n_1}} = H\sqrt{n_1^2 - 1} \quad .$$

Vậy số lần phản xạ cực đại trên biên của tấm là

$$N_1 = \left[\frac{L}{(\Delta l)_{\min}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{L}{H\sqrt{n_1^2 - 1}} + \frac{1}{2}\right] \quad .$$

Ở đây ký hiệu [ ] chỉ phần nguyên của một số. Thay số vào ta được

$$N_1 = \left[\frac{100}{1.\sqrt{1,73^2 - 1}} + \frac{1}{2}\right] = 71 \quad .$$

2/ Trường hợp 2:

$$\varphi_{\min} \leq \varphi_{gh} \qquad \text{hay} \qquad \sin\varphi_{\min} \leq \sin\varphi_{gh} = \frac{1}{n} \quad .$$

Khi đó các tia sáng tới mặt bên của tấm với góc tới nằm trong khoảng giữa $\varphi_{\min}$ và φ_{gh} sẽ chỉ phản xạ một phần, phần còn lại truyền ra ngoài và không đi đến được đầu bên phải của tấm.

Làm tương tự như trên ta tìm được

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \le \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n^2-1} \le 1 \quad \Rightarrow \quad n \le \sqrt{2} \quad .$$

Rõ ràng trường hợp này ứng với $n = n_2 = 1,3 < \sqrt{2}$. Khi đó

$$\left(\Delta l\right)_{\min} = H \tan \varphi_{gh} = H \frac{\sin \varphi_{gh}}{\cos \varphi_{gh}} = H \frac{\frac{1}{n_1}}{\frac{1}{n_1}\sqrt{n_1^2-1}} = \frac{H}{\sqrt{n_1^2-1}} \quad .$$

Vậy số lần phản xạ cực đại trên mặt bên của tấm là

$$N_2 = \left[\frac{L}{\left(\Delta l\right)_{\min}} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{L\sqrt{n_1^2-1}}{H} + \frac{1}{2} \right] \quad .$$

Thay số vào, ta được

$$N_2 = \left[\frac{L\sqrt{n_1^2-1}}{H} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{100\sqrt{1,3^2-1}}{1} + 0,5 \right] = 83 \quad .$$

HẾT