Cơ sở đo lường và sai số

Qua bài học này, sinh viên có thể nhận thức rõ về sự tồn tại của sai số phép đo. Sinh viên cũng cần nắm được cách ước lượng, tính toán sai số xuất phát từ nhiều nguyên nhân: sai số do dụng cụ, sai số do con người, sai số do môi trường đo đạc.

I. PHÉP ĐO

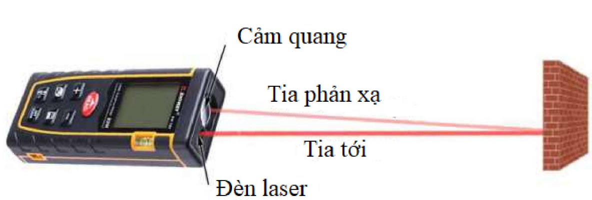
TRONG vật lý, đo đạc một đại lượng nào đó là đem đại lượng đó so sánh với một đại lượng cùng loại đã được chọn làm tiêu chuẩn - thường không thay đổi theo thời gian - gọi là đơn vị đo. Phép đo này đem lại một con số thể hiện mối liên hệ về độ lớn giữa đại lượng cần đo với đơn vị đo.

Người ta chia các phép đo thành hai loại: trực tiếp và gián tiếp.

Phép đo trực tiếp là phép đo trong đó ta đọc kết quả trực tiếp trên dụng cụ đo. Đo chiều dài bằng thước, đo cường độ dòng điện bằng ampere kế... là ví dụ về phép đo trực tiếp.

Phép đo gián tiếp là phép đo mà kết quả đo được xác định thông qua những biểu thức liên hệ giữa đại lượng cần đo với những đại lượng được đo trực tiếp hoặc gián tiếp trước đó. Ví dụ để xác định công suất tiêu thụ trên hai đầu mạch điện, ta cần đo hiệu điện thế ΔV trên hai đầu mạch, và đo cường độ dòng điện I đi qua mạch. Công suất tiêu thụ là phép đo gián tiếp: $P = \Delta V \cdot I$.

Lưu ý rằng một số phép đo trực tiếp thực chất là phép đo gián tiếp. Ví dụ trường hợp máy đo khoảng cách bằng xung laser, máy sẽ đo thời gian Δt kể từ khi xung ánh sáng phát ra, phản xạ trên đối tượng cần xác định khoảng cách rồi trở về máy. Lúc này khoảng cách thu được là phép tính gián tiếp từ kết quả đo thời gian: $l = c \cdot \Delta t/2$ (c – tốc độ ánh sáng).

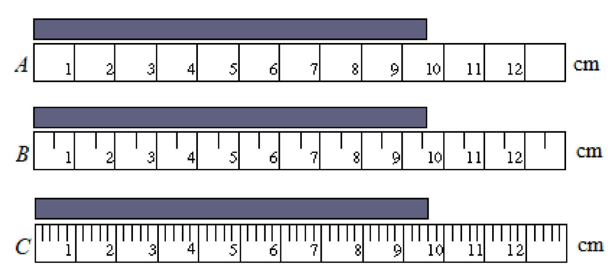


Hình 1: Nguyên lý máy đo khoảng cách bằng laser

II. ĐỘ CHIA NHỎ NHẤT

Để ghi lại kết quả đo, ta cần quan sát chỉ số hiển thị trên dụng cụ đo. Với các thiết bị tương tự (analog), đó là giá trị tương ứng với vạch gần nhất. Với thiết bị số (digital), chỉ cần ghi lại con số hiển thị.

Hình 2 đưa ra những minh họa khác nhau về độ chia nhỏ nhất của thước đo chiều dài. Thước A có độ chia nhỏ nhất bằng 1 cm, ta thấy chiều dài vật có thể ghi thành 10 cm. Thước B có độ chia nhỏ nhất bằng 0.5 cm, ta có thể lấy giá trị độ dài bằng 9.5 cm. Thước C được chia vạch chi tiết đến 0.2 cm, ta có thể đọc giá trị bằng 9.6 cm.



Hình 2: Vạch chia nhỏ nhất

Như vậy, cùng một vật như nhau nhưng khi đọc giá trị đo trên thước có vạch chia khác nhau sẽ cho ra kết quả khác nhau, dù cho chúng sử dụng cùng hệ đơn vị.

Máy đo nhiệt độ bằng hồng ngoại như hình 3 lại hiển thị qua màn hình số, cho ra giá trị 36.8°C. Điều này không có nghĩa nhiệt độ của vật chính xác bằng 36.8°C. Cần hiểu vấn đề như sau: máy đo này chỉ cho phép hiển thị các giá trị 36.6, 36.7, 36.8, 36.9..., đúng 1 chữ số sau dấu thập phân không chi tiết hơn, và 36.8 nằm gần giá trị thực nhất trong phép đo này.

Rõ ràng độ chia nhỏ nhất của thiết bị đo luôn tạo ra sai số nhất định mà ta gọi là *sai số làm tròn*.

Người ta không giảm sai số làm tròn bằng cách

Hình 3: Máy đo nhiệt độ bằng hồng ngoại với màn hình hiển thị số

chia độ chi tiết hơn cho thiết bị, bởi vì còn tồn tại nhiều loại sai số khác như sai số dụng cụ, sai số ngẫu nhiên... Độ chia nhỏ nhất không thể nhỏ hơn các sai số này. Phần tiếp theo chúng ta tìm hiểu rõ hơn về vấn đề sai số.

III. SAI SỐ

Sai số thể hiện rõ khi tiến hành đo đạc nhiều lần một đại lượng vật lý, dù cẩn thận đến mấy vẫn thấy kết quả các lần đo hầu như đều khác nhau. Việc tìm giá trị chính xác của đại lượng cần đo là không thể. *Ta chỉ có thể xác định được khoảng tin cậy, theo đó giá trị cần tìm có thể lệch khỏi giá trị thực trong phạm vi khoảng tin cậy đó.* Ví dụ: phép đo thời gian thu được kết quả $t = 2.5 \pm 0.1\,\mathrm{s}$, có nghĩa thời gian t nằm trong khoảng từ $2.4\,\mathrm{s}$ đến $2.6\,\mathrm{s}$. Khoảng tin cậy $0.1\,\mathrm{s}$ chính là sai số.

Sai số là giá trị chênh lệch giữa giá trị đo được hoặc tính được với giá trị thực hay giá trị chính xác của đại lượng cần đo.

Các nguyên nhân chủ yếu dẫn đến sai số gồm:

- Do phương pháp đo lường không chính xác.

- Do thiết bị đo không chính xác.

- Do sự vụng về hay khéo léo của người đo.

- Do các yếu tố bên ngoài tác động đến phép đo.

Theo quy luật xuất hiện, người ta chia sai số ra làm ba loại: *sai số thô*, *sai số hệ thống* và *sai số ngẫu nhiên*.

Sai số thô

Nếu số liệu thu được xuất hiện một giá trị chênh lệch một cách rõ rệt, quá cao hoặc quá thấp một cách vô lý so với những lần đo khác, ta nói số liệu đó có chứa sai số thô. Sai số thô xuất hiện do sự sơ suất của người làm thí nghiệm, hoặc do bị chấn động đột ngột từ bên ngoài, cũng có thể do thiếu ánh sáng có thể đọc nhầm 3 thành 8 hoặc 171.78 thành 1717.8...

Khi gặp kết quả có chứa sai số thô, ta cần lặp lại nhiều lần phép đo và mạnh dạn bỏ nó ra khỏi bảng số liệu. *Như vậy trong phần tính toán sai số ta luôn xem rằng các kết quả đo không chứa sai số thô.*

Sai số hệ thống

Sai số hệ thống là sai số gây bởi những yếu tố tác động như nhau lên kết quả đo, có giá trị không đổi trong các lần đo được tiến hành bằng cùng một dụng cụ theo cùng một phương pháp.

Sai số hệ thống được chia thành hai loại:

- Sai số hệ thống biết được chính xác nguyên nhân và độ lớn: Sai số này xuất hiện khi dụng cụ đo đã bị sai lệch. Chẳng hạn, khi chưa có dòng điện chạy qua mà kim của ampere kế đã chỉ $0.1\,\mathrm{A}$, khi chưa kẹp vật cần đo chiều dài vào thước kẹp mà thước đã cho chiều dài là $0.1\,\mathrm{mm}$... Sai số loại này có thể khắc phục và loại bỏ bằng cách hiệu chỉnh lại dụng cụ, hoặc hiệu chỉnh lại kết quả (cộng thêm hoặc trừ bớt vào kết quả thu được sai lệch ban đầu).

- Sai số hệ thống biết được nguyên nhân nhưng không biết chính xác độ lớn: Sai số này phụ thuộc vào độ chính xác của dụng cụ đo, bao gồm *sai số dụng cụ* và *sai số làm tròn*.

Sai số ngẫu nhiên

Sai số ngẫu nhiên là sai số còn lại của phép đo sau khi đã loại trừ hết sai số thô và sai số hệ thống. Sai số ngẫu nhiên gây nên bởi một số rất lớn các nhân tố mà ta không thể tách riêng và tính riêng biệt cho chúng được. Có thể xem sai số ngẫu nhiên là tác dụng tổng hợp của các nhân tố đó.

Giác quan của người làm thí nghiệm không tinh, không nhạy dẫn đến không phân biệt được đúng chỗ trùng nhau của hai vạch chia trên thước kẹp, do điều kiện thí nghiệm thay đổi một cách ngẫu nhiên ta không thể biết được mà dẫn đến kết quả đo mắc sai số... đều có thể dẫn đến sai số ngẫu nhiên. Ví dụ, đo cường độ dòng điện trong mạch có điện áp luôn thăng giáng hoặc nhiệt độ, áp suất trong phòng luôn luôn thay đổi mà ta không phát hiện được làm cho kết quả đo bị thăng giáng...

Sai số ngẫu nhiên có độ lớn và chiều thay đổi hỗn loạn. Chúng ta không thể loại trừ chúng ra khỏi kết quả đo mà chỉ có thể sử dụng các phương pháp toán học, như các lý thuyết xác suất để ước lượng và đưa vào đánh giá kết quả đo.

IV. TÍNH SAI SỐ PHÉP ĐO TRỰC TIẾP

Sai số hệ thống

Để tính sai số hệ thống, ta cần xác định sai số dụng cụ và sai số làm tròn.

Giới hạn Δ_{max} của sai số dụng cụ *hoàn toàn do nhà sản xuất quy định và cung cấp qua tài liệu hoặc ghi trên thiết bị*. Sai số dụng cụ nằm trong giới hạn này cũng tuân theo phân bố Gauss, nên ta có thể ước lượng sai số này qua độ lệch chuẩn:

$$\sigma_{dc} = \frac{\Delta_{max}}{3}$$

với độ tin cậy đạt tới 99.7%.

Sai số làm tròn được tính từ giá trị thực (không được ghi lại) đến vạch chia gần nhất. Do đó sai số làm tròn đặc trưng qua độ lệch chuẩn:

$$\sigma_{lt} = \frac{\omega}{3},$$

với ω là độ chia nhỏ nhất.

Độ lệch chuẩn của sai số hệ thống tính qua các độ lệch chuẩn:

$$\sigma_{ht} = \sqrt{\sigma_{dc}^2 + \sigma_{lt}^2}.$$

Sau cùng, sai số hệ thống tính bằng công thức:

$$\Delta X_{ht} = \gamma_\alpha \cdot \sigma_{ht} = \gamma_\alpha \cdot \sqrt{\sigma_{dc}^2 + \sigma_{lt}^2},$$

trong đó γ_α là hệ số của bất đẳng thức Chebyshev, trong đó α là độ tin cậy (xem bảng 1).

Sai số ngẫu nhiên

Bảng 2 có thể lấy làm ví dụ minh hoạ cho sự biến thiên của kết quả đo do sai số ngẫu nhiên.

Bảng 1: Hệ số γ_α của bất đẳng thức Chebyshev

α	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	...	0.95
γ_α	1.4	1.6	1.8	2.2	3.2	...	4.4

Bảng 2: Bảng dữ liệu thời gian trong các lần đo khác nhau

t (s)	$t-\bar{t}$	$\lvert t-\bar{t}\rvert$	$(t-\bar{t})^2$
7.4	-0.2	0.2	0.04
8.1	0.5	0.5	0.25
7.9	0.3	0.3	0.09
7.0	-0.6	0.6	0.36
$\bar{t} = 7.6$	$\overline{t-\bar{t}} = 0$	$\overline{\lvert t-\bar{t}\rvert} = 0.4$	$\overline{(t-\bar{t})^2} = 0.247$

Cột đầu tiên viết lại thời gian đo được trong những lần đo khác nhau. Giá trị trung bình của phép đo thu được: $\bar{t} = 7.6\,\text{s}$.

Cột thứ 2 diễn tả độ lệch của mỗi lần đo so với giá trị trung bình. Độ lệch này có thể dương, có thể âm và dao động quanh mức 0. Do đó giá trị trung bình của độ lệch sẽ tiến về 0 khi xét nhiều lần đo: $\overline{t-\bar{t}} = 0$. Vì vậy con số này không thể dùng để diễn tả sai số ngẫu nhiên.

Ta có thể đánh giá sai số ngẫu nhiên qua giá trị trung bình của độ lệch tuyệt đối $\overline{\lvert t-\bar{t}\rvert}$, luôn thể hiện là một số dương.

Tuy vậy, sự biến thiên ngẫu nhiên của kết quả đo thường tuân theo phân bố Gauss nên người ta hay tính sai số ngẫu nhiên qua phương sai $\overline{(t-\bar{t})^2}$, cụ thể hơn thông qua độ lệch chuẩn: $\sqrt{\overline{(t-\bar{t})^2}}$.

Quy trình tính sai số ngẫu nhiên:

Giả sử chúng ta đo N lần một đại lượng vật lý X và thu được các giá trị $X_1, X_2, \ldots X_N$.

- **Bước 1:** Tính giá trị trung bình của các lần đo

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i.$$

- **Bước 2:** Tính sai số tuyệt đối cho từng lần đo

$$\Delta X_i = \lvert X_i - \overline{X}\rvert.$$

- **Bước 3:** Tính sai số ngẫu nhiên trung bình thông qua độ lệch chuẩn

$$\begin{aligned}\overline{\Delta X_{nn}} &= \sqrt{\frac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + \ldots + \Delta X_N}{N-1}}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}.\end{aligned}$$

Phép chia cho $N-1$ thay vì N được giải thích trong môn xác suất thống kê.

Sai số của phép đo trực tiếp

Sai số phép đo trực tiếp được tính từ sự kết hợp của sai số hệ thống và sai số ngẫu nhiên:

$$\overline{\Delta X} = \sqrt{\Delta X_{ht}^2 + \Delta X_{nn}^2}.$$

V. TÍNH SAI SỐ PHÉP ĐO GIÁN TIẾP

Giả sử ta phải đo một đại lượng F liên hệ với các đại lượng $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bởi hàm số: $F = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ trong đó đại lượng $x_1, x_2, x_3, \ldots$ được đo trực tiếp. Từ phương pháp tính sai số của phép đo trực tiếp đã trình bày ở trên, chúng ta thu được giá trị trung bình của các đại lượng $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots$ và sai số tuyệt đối trung bình của các đại lượng đó $\overline{\Delta x_1}, \overline{\Delta x_2}, \overline{\Delta x_3}, \ldots$

Giá trị trung bình của đại lượng F được tính bằng chính hàm số $F = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, chỉ thay các biến số bằng giá trị trung bình:

$$\overline{F} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots)$$

Sai số tuyệt đối trung bình $\overline{\Delta F}$ được tính theo công thức lan truyền sai số:

$$\overline{\Delta F} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\overline{\Delta x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\overline{\Delta x_2}\right)^2 + \ldots}$$

trong đó $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \ldots$ là đạo hàm riêng theo mỗi biến. Khi không cần độ chính xác cao người ta lấy sai số cực đại theo công thức tính gần đúng như sau:

$$\overline{\Delta F} = \left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|\overline{\Delta x_1} + \left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\overline{\Delta x_2} + \ldots$$

Ví dụ: Cho $F = \dfrac{x-y}{x+y}$.

Giá trị trung bình của đại lượng F:

$$F = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\overline{x} + \overline{y}}.$$

Sai số tuyệt đối trung bình của đại lượng F:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta F} &= \left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|\overline{\Delta x_1} + \left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\overline{\Delta x_2} \\ &= \left|\frac{2y}{(x+y)^2}\right|\overline{\Delta x_1} + \left|\frac{-2x}{(x+y)^2}\right|\overline{\Delta x_2}.\end{aligned}$$

VI. CÁCH VIẾT KẾT QUẢ

Làm tròn sai số

Các bài thí nghiệm trong giáo trình thí nghiệm vật lý có yêu cầu về độ chính xác trong các phép đo không cao lắm vì số lần đo một đại lượng vào khoảng 10 lần. Do đó, thông thường trong sai số chỉ giữ lại một đến hai chữ số có nghĩa khác 0.

Tuy nhiên, trong tính toán, sai số có thể gồm nhiều chữ số và ta phải làm tròn theo qui tắc làm tròn sao cho độ tin cậy của phép đo không bị giảm đi, tức là chữ số khác không được giữ lại sẽ tăng lên 1 đơn vị khi chữ số sau nó khác không. Thí dụ các sai số 0.164, 0.275, 0.285, 1.94 được làm tròn thành 0.2, 0.3, 0.3, 2.

Trong trường hợp làm tròn theo cách trên mà sai số đã làm tròn tăng lên quá 25% so với sai số ban đầu thì có thể giữ lại hai chữ số khác không. Ví dụ 0.127 thành 0.13.

Chữ số có nghĩa và chữ số vô nghĩa

Mọi số A bất kỳ đều có thể viết dưới dạng chuẩn hóa:

$$A = a \cdot 10^n,$$

trong đó $1 < a < 10$ và n được gọi là bậc của số A. Ví dụ, 5.12 viết dưới dạng chuẩn hóa bằng $5.12 \cdot 10^0$ (bậc 0), 0.0031 viết dưới dạng chuẩn hóa sẽ thành $3.1 \cdot 10^{-3}$ (bậc -3).

Bảng 3 đưa ra một vài ví dụ, theo đó dựa vào mối tương quan giữa sai số và giá trị trung bình mà ta có thể đánh giá vai trò của từng chữ số của giá trị trung bình.

Những chữ số của giá trị trung bình có bậc lớn hơn bậc của sai số là *chữ số tin cậy*. Những chữ số có cùng bậc với sai số là *chữ số nghi ngờ*. Những chữ số có bậc nhỏ hơn bậc của sai số là *chữ số không tin cậy*.

Chữ số có nghĩa là các chữ số tin cậy và nghi ngờ.

Chữ số vô nghĩa là chữ số không tin cậy và các chữ số 0 dùng để thiết lập dấu thập phân.

Bảng 3: Phân loại chữ số

Giá trị trung bình	Sai số	Chữ số có nghĩa		Chữ số vô nghĩa	
		Chữ số tin cậy	Chữ số nghi ngờ	Chữ số không tin cậy	Số 0 vô nghĩa
216	3	2-1	6	–	
0.365	0.01	3	6	5	0.(365)
1.34	0.03	1-3	4	–	
13100	10	1-3-1	0	0	
0.025	0,001	2	5	–	0.0(25)
0.78	0,01	7	8	–	0.(78)

Cách viết kết quả

Chúng ta viết kết quả theo qui tắc sau đây:

- Giá trị trung bình của đại lượng cần đo được viết dưới dạng chuẩn hóa.

- Làm tròn sai số theo quy tắc làm tròn trình bày ở trên.

- Làm tròn giá trị trung bình sao cho bậc của chữ số có nghĩa nhỏ nhất của giá trị trung bình bằng bậc của sai số.

Bảng 4 đưa ra vài ví dụ viết kết quả đo khi đã biết giá trị trung bình và sai số.

Bảng 4: Cách viết kết quả

Giá trị trung bình	Sai số	Kết quả
279.16	0.27	$(2.792 \pm 0.003) \cdot 10^2$
1000	1	$(1.000 \pm 0.001) \cdot 10^3$
0.062	0.001	$(6.2 \pm 0.1) \cdot 10^2$
12.54	0.26	$(1.25 \pm 0.03) \cdot 10^1$

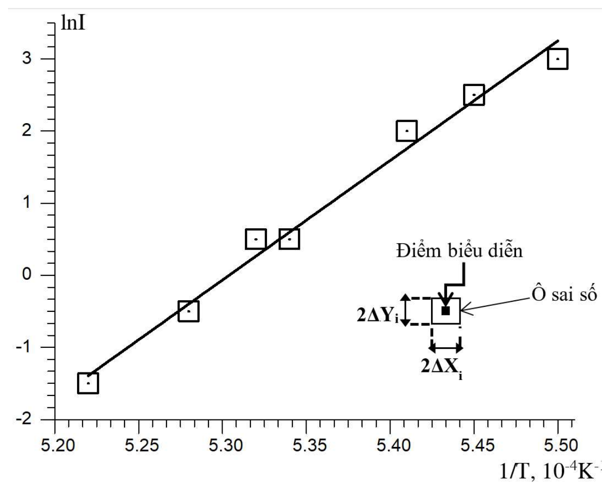
Lưu ý:

- Trong một tổng của nhiều sai số tương đối, nếu một số hạng nào đó nhỏ hơn 1/10 số hạng khác thì có thể bỏ qua số hạng đó.

- Khi tính kết quả trong công thức ta thường gặp các hằng số như $\pi, g, \ldots$ Viiệc lấy đến mấy số lẻ trong các hằng số này phụ thuộc vào các đại lượng trong bài thí nghiệm. Tốt nhất là nên lấy đến số lẻ sao cho sai số tương đối của hằng số đó nhỏ hơn 1/10 sai số của các đại lượng khác.

VII. CÁCH DỰNG ĐƯỜNG BIỂU DIỄN THỰC NGHIỆM

Trong một bài thí nghiệm chúng ta cần biểu diễn kết quả trên đồ thị. Trước hết cần chọn phạm vi thể hiện và tỉ lệ cho các trục tọa độ, sao cho góc nghiêng của đồ thị gần bằng 45 độ. Các đường biểu diễn phải chiếm gần hết phần mặt đồ thị.



Hình 4: Đồ thị thực nghiệm phải đi qua các ô sai số

Trên các trục toạ độ cần viết rõ tên, kí hiệu, đơn vị đo của các đại lượng.

Bằng thực nghiệm, ta đã tìm được các giá trị của y_i theo x_i của hàm số $y = f(x)$. Vì phép đo có sai số nên cặp (x_i, y_i) cần viết thành $(x_i \pm \Delta x_i, y_i \pm \Delta y_i)$. Do đó điểm thực nghiệm không phải là điểm (x_i, y_i) mà là một hình chữ nhật có tâm tại (x_i, y_i) và có hai cạnh bằng $2\Delta x_i$ và $2\Delta y_i$ (hình 4). Lúc này đường biểu diễn hàm số $y = f(x)$ phải được vẽ sao cho đường biểu diễn đều đi qua các hình chữ nhật ấy.

Cần chú ý rằng đường cong thực nghiệm $y = f(x)$ phải là một đường cong trơn, không gãy khúc. Do đó, khi vẽ đường biểu diễn ta cần lưu ý: *không nối các điểm thực nghiệm lại* mà cần vẽ một đường cong trơn (hoặc đường thẳng) đi qua các ô sai số.